Olavo FREIRE

NOÇÕES DE Geometria Pratica

1.105 *exercicios*
340 *problemas resolvidos*
665 *gravuras*

38ª Edição integralmente refundida

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
PAULO DE AZEVEDO & C.
RIO DE JANEIRO — 166, RUA DO OUVIDOR, 166
SÃO PAULO — 49ª, RUA [illegible]
BELLO HORIZONTE, 1055, RUA DA [illegible] 1055

Approvada e premiada pelo Conselho da Instrucção [illegible] do Districto [illegible]

Olavo FREIRE

NOÇÕES

DE

metria Pratica

1.105 exercicios
340 problemas resolvidos
665 gravuras

35ª Edição inteiramente refundida

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
PAULO DE AZEVEDO & Cia

IO DE JANEIRO
RUA DO OUVIDOR, 166

SÃO PAULO
49ª, RUA LIBERO BADARÓ, 49ª

BELLO HORIZONTE, 1052, RUA DA BAHIA, 1052

1930

Mª M. Ramos

Ao dilécto Mestre e Amigo

o

Ill.^mo e Ex.^mo Sr.

Dr. J. J. de MENESES VIEIRA,

em testemunho de

gratidão

O. D. C.

o

Olavo

Outubro — 1894

OLAVO,

Teu livrinho — *Primeiras noções de Geometria* — é um bom instrumento de ensino e uma prova da conquista que vão fazendo entre nós os sãos principios pedagogicos.

Conseguiste libertar-te dos velhos moldes quanto ao methodo, aos exemplos, ao estylo e ao *sestro* de arranjar compendios por empreitada e *à la minute:* acceita meus sinceros parabens!

Sinto, entretanto, que tivesses em um ponto transigido com a rotina (1), preferindo problemas abstractos ás questões práticas cuja resolução se offerece todos os dias na vida social.

Receiaste por ventura os sarcasmos de que foi *victima* o excellente M. Desargues, o consciencioso propagandista da geometria applicada ás artes?

Que te importaria semelhante affronta?

Aos teus censores responderias com as textuaes palavras do illustre Clairaut em 1741 :

« Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que les cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés de cet autre ; on ne sera pas surpris.

« La géométrie avait à convaincre des sophistes obstinés

---

(1) *Não transigi em absoluto porque pretendo publicar uma série de problemas de caracter essencialmente prático.*

O. FREIRE.

qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes. Il fallait donc alors que la géométrie eût, comme la logique, des raisonnements pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et dégoûter les lecteurs. »

E na verdade, meu amigo, *la géométrie du bon sens*, a geometria realmente descriptiva e intuitiva é a unica que deve ter o direito de entrada nas escólas primarias.

Este é o parecer do teu velho mestre e amigo dedicado.

Meneses Vieira.

N. C. — 26 Outubro 1894.

Algumas opiniões da Imprensa

Jornal do Commercio, 29 de março de 1895

Os Srs. Alves & C^ia^ acabam de editar um livro muito util do Sr. Olavo Freire. Intitula-se *Primeiras noções de Geometria Pratica* e dá ao ensino da geometria elementar a facilidade que os estudantes não encontram em outros compendios.

O Sr. Olavo Freire, pela clareza da sua exposição e pela excellencia do methodo que adoptou, soube tornar o seu livro uma obra didactica de merito verdadeiramente excepcional. Por elle a geometria elementar póde ser ensinada com grande vantagem nas escólas de instrucção primaria, e sabem todos quanto o conhecimento da geometria impõe-se hoje a todas as profissões.

Como em outros compendios d'essa sciencia, o livro é ornado de muitas gravuras, cerca de 260, explicativas e exemplificativas.

O Paiz, 7 de abril de 1895 :

Primeiras noções de Geometria Pratica. — O Sr. Olavo Freire, conhecido e reputado professor de desenho e trabalhos manuaes, soube com pericia compendiar em 159 paginas, in-8°, todas as noções elementares de geometria pratica.

O volume que temos presente constitue trabalho utilissimo para as escólas primarias brasileiras.

Os numerosos exercicios e problemas praticos e as nitidas e bem applicadas gravuras que encerra o compendio do Sr. Olavo Freire elucidam cabalmente a materia, cujo ensino, amenisado d'essa fórma, torna-se tarefa agradavel e facil ao professor e ao discipulo.

Prefacia o livro do professor Olavo Freire o emerito educacionista Dr. Meneses Vieira, cujas palavras constituem um brado de animação ao jovem professor e penhor valioso da utilidade de seu trabalho.

O Democrata Federal (S. Paulo) 15 de maio 1895:

Geometria pratica. Dos estimados e populares editores srs. Alves & C.ª recebemos um pequeno compendio escolar com o titulo *Primeiras noções de Geometria Pratica*, destinado, como se vê, aos estabelecimentos de instrucção primaria.

O livro, compilado pelo sr. Olavo Freire, contém 318 exercicios, 71 problemas e 233 gravuras. Desenvolve intuitivamente todos os elementos indispensaveis aos primeiros conhecimentos de mathematica linear, exemplificando os problemas com bôas gravuras elucidativas.

Pela sua clareza de exposição e pela distribuição methodica das materias, torna-se o presente opusculo um livro de grande utilidade para os principiantes, principalmente se considerarmos que no genero, raros são os auctores, que se prestam pela precisão e clareza, á aprendizagem dos jovens estudantes.

Recommendando, pois, aos srs. professores, o livro do sr. Olavo Freire, agradecemos aos sympathicos editores a valiosa offerta.

NOÇÕES DE GEOMETRIA PRATICA

CAPITULO I

PRIMEIRAS DEFINIÇÕES

SUMMARIO : **Espaço. — Corpo. — Extensão. — Volume. — Superficie. — Linha. — Ponto.**

Si collocarmos um tinteiro sobre uma mesa, elle fica em uma posição determinada no **espaço.**

ESPAÇO. A mesa está no **espaço** limitado pela sala; esta no **espaço** comprehendido pela escóla; a escóla sobre a Terra; e a Terra, em continuo movimento pelo **espaço.**

D'esta sorte todas as cousas estão no

espaço : porém que **espaço?** — Onde principia ou acaba?

O espaço, *sem ter começo nem fim, encerra todas as cousas e estende-se em todas as direcções.*

Todas as cousas que occupam um certo logar no espaço chamam-se **corpos.**

CORPO.

Assim um tinteiro, uma regua, uma mesa, um livro, uma folha, etc. occupam um certo logar no espaço e são por isso chamados **corpos.** (fig. 1).

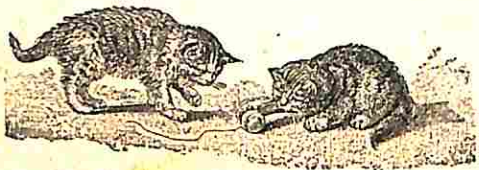



Fig. 1. — Gatos, bola, cordel, são corpos

EXERCICIOS

1. — Arnaldo! este livro occupa logar no espaço? — que nome recebe?
2. — Que é um corpo?
3. — Dá alguns exemplos de corpos · na aula, no jardim, no pateo, na sala, na rua, no quarto.
4. — Um lapis será um corpo? — porque?

O espaço occupado por um corpo chama-se **extensão.**

EXTENSÃO.

Podemos considerar a **extensão** com uma, duas ou tres dimensões, isto é, *comprimento; comprimento* e *largura;* e finalmente *comprimento, largura* e *espessura.*

EXERCICIOS

1. — Roberto! que nome tem o espaço occupado por um corpo?
2. — Quantas dimensões póde ter uma extensão?
3. — Como se chamam?
4. — Quantas dimensões tem esta regua? (o professor mostra uma regua).
5. — E este livro? — este armario? — esta mesa? — esta caixa?

A extensão com tres dimensões, isto é, *comprimento, largura,* e *espessura, altura* ou *profundidade* recebe o nome de **volume.**

VOLUME.

A porção do espaço comprehendida pelas paredes, o soalho e o tecto de uma sala é um **volume.**

A *altura* ou *profundidade* é em certos casos denominada *espessura.*

Assim dizemos : a *espessura* de uma fôlha de papel, de uma táboa, etc.

O **volume** de um corpo é o logar que este occupa no espaço.

Uma regua, um relogio, um lapis occupam logares no espaço; estes logares são os **volumes** d'esses objectos.

EXERCICIOS

1. — Beatriz! qual é o nome que recebe uma extensão com tres dimensões?
2. — Dá exemplos.
3. — Que é o volume de um corpo?
4. — O logar occupado por uma regua no espaço, que nome recebe?
5. — Diremos acertadamente: a altura de uma folha de papel? — como deveremos dizer?
6. — Será certo dizer a espessura de um poço? — como deveremos dizer?
7. — Qual o volume maior, o d'esta regua ou do moringue?
8. — Qual occupa mais espaço, um litro de leite ou um litro d'agua?

Cada corpo é separado do espaço que o cérca por um limite chamado **superficie.**

Uma superficie não tem *espessura*. Quando pegamos num livro ou em outro corpo qualquer, é na **superficie** do livro ou d'esse corpo, que tocamos; quando o operario fórra uma parede, é na sua **superficie** que elle colla o papel.

SUPERFICIE.

A epiderme do corpo humano, o epicarpo (pellicula externa de um fructo) são **superficies.**

Á extensão com duas dimensões, isto é, *comprimento e largura* dá-se o nome de **superficie.**

Alguns corpos têm uma só **superficie**: uma esphera, uma bola de bilhar, um ovo

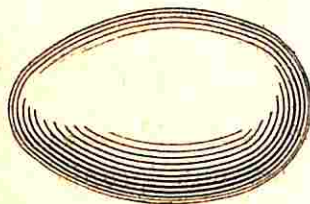



Fig. 2. — Um ovo: corpo com uma unica superficie.

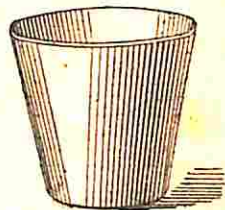
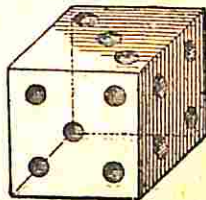



Fig. 3. — Vaso de flôres: um corpo limitado por duas superficies.

(fig 2), um limão etc.; outros são limitados por duas: um vaso de flôres (fig. 3), uma caixa cylindrica; por tres: uma moeda de nickel, um lapis cylindrico.

O dado de jogar (fig. 4) é formado por seis **superficies;** um esquadro, por cinco.

Fig. 4. — Um dado de jogar.

As **superficies** dos corpos podem ser *planas* ou

curvas; dividem-se portanto as **superficies** em *planas* e *curvas.*

A **superficie** *plana* é tambem denominada *plano.*

As **superficies** de uma prancheta, da táboa de uma mesa, de um espelho commum são *planas*, ou *planos.*

O marceneiro utilisa-se de um instrumento chamado plaina (fig. 5) para obter uma **superficie** *plana.*

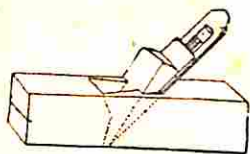



Fig. 5. — Uma plaina.

As **superficies** do ovo, de uma laranja, de uma bola são *curvas.*

O torneiro é o operario que mais trabalha as **superficies** *curvas;* é elle quem nos fabrica os cabos de utensilios, as maçanetas, as columnas, os piões, cujas **superficies** são *curvas.*

As **superficies** *curvas* são *concavas* ou *convexas.*

Fig. 6. — Uma telha : superficie convexa.

Uma telha collocada de modo a servir de calha (fig. 6) mostra uma **superficie** *concava* e em

sentido inverso (fig. 7) uma **superficie** *convexa;* a parte interior de um tubo (fig. 8)

Superficie concava

Superficie convexa

Fig. 7. — Uma telha : superficie convexa

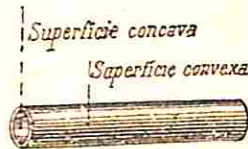



Fig. 8.

é *concava* e a parte exterior é *convexa.*

Synopse

Superficies . . .	*planas.*		
	curvas. . .	*concavas.*	
		convexas.	

EXERCICIOS

1. — Heitor! onde está a superficie d'esta parede?
2. — Que idéa fazes da superficie de um corpo?
3. — A superficie de um corpo é sempre da mesma substancia que o corpo?
4. — Tem uma superficie tres dimensões? qual a dimensão que lhe falta?
5. — Póde um corpo ter uma só superficie? — exemplos.
6. — Conheces alguns corpos terminados por duas superficies?
7. — Por quantas superficies é formada esta regua?
8. — Como se chamam estas superficies?
9. — Qual o operario que mais trabalha as superficies curvas? — e o que mais trabalha as superficies planas?
10. — Como póde o marceneiro obter uma superficie plana?
11. — Quantas superficies tem um dado de jogar?
12. — Como se chama a superficie de uma bola?
13. — Como se dividem as superficies curvas?
14. — Como se chama a superficie interior de uma cuia? — a exterior?

15. — Mostra algumas superficies concavas: — convexas.
16. — Conheces alguns objectos que só tenham superficies convexas? — exemplos

---

A extensão com uma unica dimensão: *comprimento*, chama-se **linha.**

LINHA.

Um fio muito fino, um traço feito com giz ou lapis sobre uma superficie podem ser considerados como **linhas**, porém pouco perfeitas; porque, por melhor que os façamos, sempre haverá uma *largura* ou uma *espessura*, e a **linha** geometrica não tem *largura* nem *espessura*, porém unicamente *comprimento*.

Entretanto para representarmos a **linha** empregamos geralmente o lapis, o giz, a penna, o carvão.

Fig. 9. — Recta AB; intersecção de duas superficies: uma linha.

O encontro ou intersecção de duas superficies (fig. 9) dá-nos tambem a **linha.**

A aresta de uma regua, os contornos de um corpo, de uma flôr, de um livro são **linhas.**

As **linhas** são *rectas* (fig. 10) ou *curvas* (fig. 11).

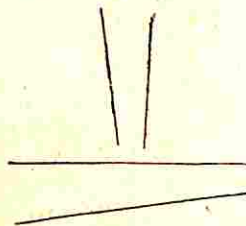



Fig. 10. — Linhas rectas

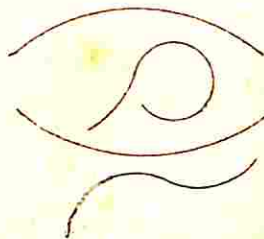



Fig. 11. — Linhas curvas.

Um fio (fig. 12) bem esticado dá-nos idéa de uma **linha** *recta*.

Fig. 12. — Um fio bem esticado: linha recta.

O instrumento usado para auxiliar o traçado das **linhas** *rectas* chama-se régua (fig. 13).

Fig. 13. — Uma regua.

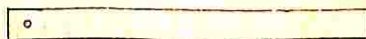
O carpinteiro e o pintor servem-se algumas vezes, para traçar uma **linha** *recta*, de um cordel coberto de giz fixando-o

bem esticado pelas extremidades, levantan-

Fig. 14.

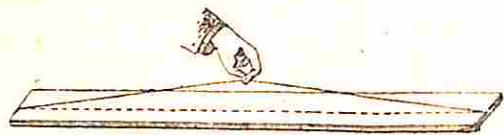
do-o depois pelo meio e largando-o de repente (fig. 14).

Designa-se geralmente uma **linha** *recta* por meio de duas lettras collocadas, uma em cada extremidade, como por exemplo: a recta AB (fig. 15).

Fig. 15. — Recta A B.

De um ponto a outro só podemos traçar uma **linha** *recta.*

Uma **recta** póde ser prolongada em ambas as direcções.

Prolongar uma recta é dar-lhe maior extensão em uma ou em ambas as direcções; conforme o enunciado, assim deve ser o prolongamento de uma **recta.**

Prolongar, por exemplo, AB (fig. 15) é dar-lhe maior extensão na direcção de A para B; e prolongar BA é fazer-lhe o mesmo na direcção de B para A.

A **linha** *recta,* segundo a direcção que segue, póde estar na posição *vertical, horizontal* ou *inclinada.*

A **linha** *recta* está na posição *vertical* (fig. 16) quando segue a direcção do *fio a prumo* (fig. 17).

O *fio a prumo* compõe-se geralmente de um cordel, na extremidade do qual se acha suspenso um corpo pesado.

O *fio a prumo* é muito usado pelos pedreiros.

Em um relogio de parede, quando não está trabalhando, o pendulo occupa a posição *vertical.*

Fig. 16. — Linha recta em posição vertical.

Fig. 17. — Fio a prumo.

A **linha** *recta* está em posição *horizontal* (fig. 18) quando segue a direcção da superficie das aguas quietas, tranquillas.

Assim, por exemplo, se conseguirmos collocar sobre a superficie d'agua um phosphoro e se este ahi se conservar, ficará em posição *horizontal.*

Fig. 18. — Linha recta em posição horizontal.

O instrumento que serve para se verificar

Fig. 19. — Um nivel.

se uma ***recta*** ou uma ***superficie*** está em posição ***horizontal*** chama-se *nivel* (fig. 19).

Fig. 20. — Linha recta em posição inclinada.

A **linha** recta está em posição ***inclinada*** (fig. 20) quando não estiver em posição nem ***vertical*** nem ***horizontal***.

É com o *metro* (*) (fig. 21) que geralmente se medem as **linhas** ***rectas***.

(*) O *metro* é a unidade principal de comprimento; é a decima millionesima parte de um quarto do meridiano terrestre. — O *metro* tem geralmente a fórma de uma **regua** chata ou quadrada, de madeira, sobre a qual estão marcadas as divisões dos decimetros, centimetros e algumas vezes dos millimetros.

Fabricam-se tambem *metros* dobradiços (fig. 21) em madeira, osso ou metal, e em fitas de panno, aço ou papel.

Divide-se o *metro* em decimetros, centimetros e millimetros. O decimetro é a decima parte do *metro*, o centimetro, a centesima parte e o millimetro a millesima parte. 10 *metros* = 1 decametro; 100 *metros* = 1 hectometro; 1000 *metros* = 1 kilometro; 10000 *metros* = 1 myriametro.

A **linha** que, além de não ser ***recta***, não

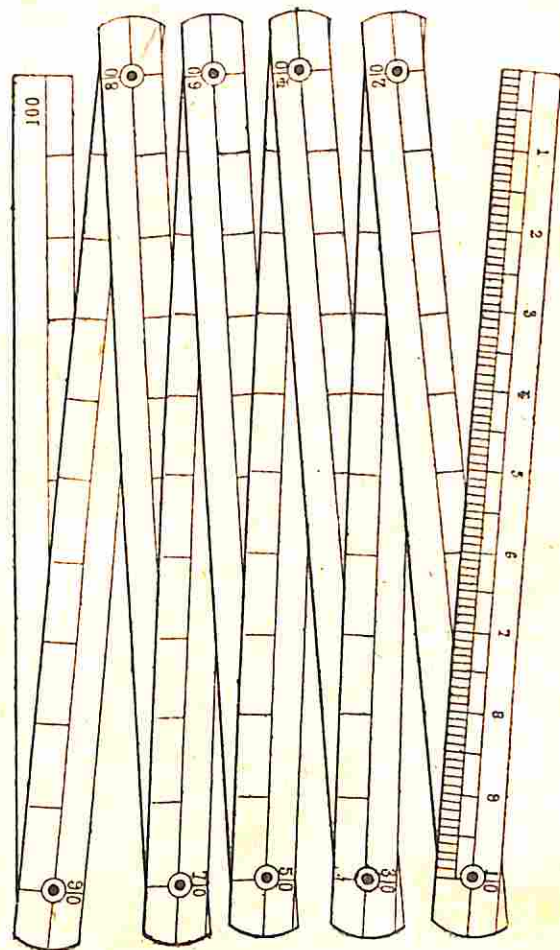



Fig. 21. — Um metro, tamanho natural.

é formada de ***rectas***, é uma **linha** ***curva***.

Ha uma infinidade de **linhas** *curvas* e a mais simples é a *circumferencia* (fig. 22).

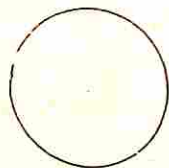



Fig. 22.
Circumferencia.

Qualquer trecho de uma **circumferencia** chama-se um **arco**; e com um instrumento chamado *compasso* podemos traçar um arco ou uma circumferencia completa, desde que fixemos uma das pontas d'esse instrumento no papel ou qualquer superficie plana e, com a outra, risquemos esse mesmo papel ou superficie,fazendo a ponta movel girar ao redor da ponta fixa.

Chama-se *fazer centro*, ao acto de fixar uma das pontas do compasso em um determinado ponto.

Á distancia,em linha recta,entre as duas pontas de um compasso,dá-se o nome de **raio.**

A **linha** composta de *rectas* é chamada **linha** *quebrada* (fig. 23).

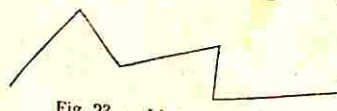



Fig. 23. — Linha quebrada.

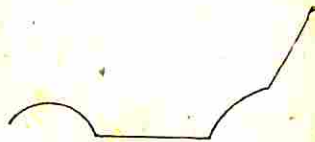



Fig. 24. — Linha mixta.

A **linha** composta de *rectas* e *curvas* chama-se **linha** *mixta* (fig. 24).

EXERCICIOS

1. — Gilberto! que nome recebe a extensão com uma unica dimensão?
2. — Como se chamam as extremidades de uma superficie?
3. — Como se chama a intersecção ou encontro de duas superficies?
4. — Qual a unica dimensão da linha?
5. — Que linhas conheces?
6. — Mostra uma linha recta.
7. — Qual d'estes caminhos é o mais curto? — porque? (O professor traça no quadro negro duas linhas: uma recta : outra curva).
8. — Como podes traçar uma linha no papel? — e na ardozia?
9. — Para que serve a regua?
10. — Todas as reguas têm a mesma fórma?
11. — De que processo se servem algumas vezes os carpinteiros para traçar linhas **rectas**?
12. — Como geralmente designamos uma linha recta?
13. — Quantas linhas rectas pódes traçar de um ponto a outro?
14. — Segundo a direcção que segue, que nomes recebe uma linha recta?
15. — Quando uma recta é vertical?
16. — Quando é horizontal?
17. — Quando inclinada?
18. — Que é um fio a prumo?
19. — Para que serve o fio a prumo?
20. — Traça uma linha recta em posição vertical; — horizontal; — inclinada.
21. — Que é o nivel?
22. — Para que serve?
23. — Já viste algum nivel? — com quem?
24. — Descreve esse instrumento.
25. — Nivela a tua mesa; em que posição está agora o tampo da mesa?
26. — Que é o metro?

27. — Para que serve ?
28. — Como se divide o metro ?
29. — Um metro quantos decimetros tem ?
30. — Meio metro quantos centimetros tem ?
31. — Quantos millimetros serão necessarios para formar um metro ?
32. — Quando uma linha não é recta, nem formada de linhas rectas, como se chama ?
33. — Qual a mais simples linha curva ?
34. — Que é uma linha quebrada ?
35. — Que é uma linha mixta ?
36. — Traça uma linha recta; uma linha curva; uma linha quebrada; uma linha mixta.
37. — Que quer dizer : FAZER CENTRO ?
38. — Que nome se dá á distancia entre as duas pontas de um compasso ?
39. — Traça uma circumferencia; — um arco.
40. — Faze centro no canto do teu papel e traça um arco.
41. — Dize o nome de alguns objectos em que vês uma circumferencia.
42. — Mostra algumas cousas circulares.

PONTO.

As extremidades de uma linha são **pontos;** a intersecção de duas linhas é um **ponto,** e o logar onde duas linhas se encontram é tambem um **ponto.**

O **ponto** geometrico não tem dimensões, isto é, não tem *comprimento, largura* nem *espessura;* entretanto determinamol-o por meio de um signal deixado pela ponta do lapis, da penna, do giz em uma superficie.

Designamos os **pontos** por meio de lettras; assim, por exemplo : **ponto** A (fig. 25), **ponto** B, **ponto** X.

Fig. 25. — Ponto A.

A **linha recta** póde ser definida como sendo o vestigio, o signal, o rasto deixado por um **ponto** que se move numa direcção constante.

A *linha curva* é o vestigio deixado por um **ponto** que se move numa direcção qualquer.

Um **ponto** em relação a uma ***circumferencia*** póde ser *exterior*, *interior* ou *estar na circumferencia;* e sua distancia ao centro póde ser *superior, inferior,* ou *egual* ao **raio.**

Uma ***linha recta*** e uma ***circumferencia*** podem ter um ou dois **pontos** communs, e duas ***circumferencias*** podem ter tambem um ou dois **pontos** communs entre si.

EXERCICIOS

1. — Dinah ! como se chamam as extremidades de um linha ?
2. — Como se chama a intersecção de duas linhas ?
3. — Quantas dimensões tem o ponto ?
4. — Como designamos um ponto ?
5. — Como determinamos um ponto ?
6. — Como podemos definir a linha recta ?

7. — Como podemos definir a linha curva?

8. — Um ponto em relação a uma circumferencia em quantas posições póde estar?

9. — Uma recta e uma circumferencia, quantos pontos communs podem ter entre si?

10. — Duas circumferencias, quantos pontos communs podem ter, entre si?

11. — A distancia de um ponto ao centro de um circumferencia, que póde ser em relação ao raio dessa curva?

CAPITULO II

SUMMARIO: **Angulos — Divisão dos angulos Bissectriz. — Problemas.**

Se duas linhas se encontram, formam um **angulo.**

Angulo é o maior ou menor afastamento de duas linhas que se encontram.

ANGULOS.

Um compasso aberto (fig. 26), as folhas de uma tesoura (fig. 27) dão-nos perfeita idéa do **angulo.**

O ponto de encontro chama-se *vertice*, as linhas tomam o nome de *lados* do

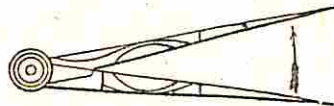



Fig. 26. — Compasso aberto: um angulo.

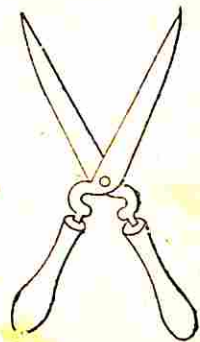



Fig. 27. — As folhas de uma tesoura: um angulo.

angulo e o afastamento dos *lados* chama-se *abertura do* **angulo** (fig. 28).

Vertice
Lado
Abertura
Lado

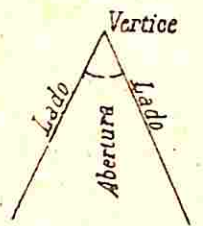



Fig. 28. — Un angulo.

Designa-se um **angulo** por tres lettras collocadas, uma no *vertice* e as outras duas nas extremidades dos *lados* (fig. 29) ou simplesmente por uma lettra collocada no *vertice* (fig. 30).

V A B

Fig. 29. — Angulo AVB.

V

Fig. 30. — Angulo V. Fig. 31. — Angulo recto. Fig. 32. — Angulo agudo

Um **angulo** é : *recto* (fig. 31), *agudo* (fig. 32), ou *obtuso* (fig. 33).

Se uma linha recta se encontra com outra e não se inclina para um nem para outro lado, o **angulo** é *recto.*

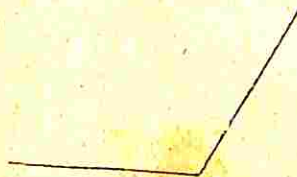



Fig. 33. — Angulo obtuso.

Se a *abertura* de um **angulo** é menor que a do **angulo** *recto,* elle é *agudo ;* se maior, é *obtuso.*

A linha que divide o **angulo** em duas partes eguaes chama-se *bissectriz* (fig. 34).

V M

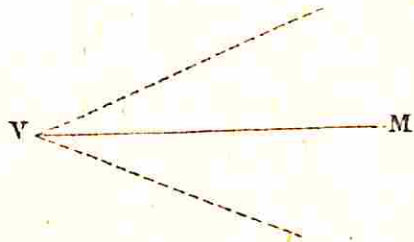



Fig. 34 — Bissectriz VM.

Qualquer ponto marcado na *bissectriz* de um **angulo** fica a egual distancia dos lados d'esse **angulo.**

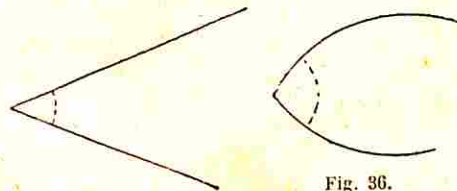



Fig. 35. — Angulo rectilineo. Fig. 36. Angulo curvilineo.

O **angulo,** conforme as linhas que o formam, é *rectilineo* (fig. 35), *curvilineo* (fig. 36), ou *mixtilineo* (fig. 37).

Se as linhas que o formam são rectas : o **angulo** é *rectilineo.* Exemplos : os angulos de um esquadro, de um cartão de visita, de um enveloppe.

Fig. 37. — Angulo mixtilineo

Se as linhas que o formam são curvas : o **angulo** é *curvilineo.*

Exemplos: As pontas de certas fôlhas, assim como da hera, da roseira, a extremidade da fôlha de um canivete, a ponta de uma espada.

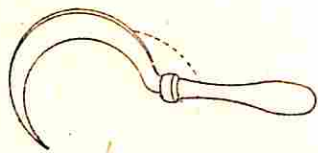



Fig. 38. — Uma fouce: um angulo mixtilineo.

E, finalmente, se as linhas que o formam são uma recta e outra curva, o **angulo** é *mixtilineo*. Exemplos: Uma fouce (fig. 38), a ponta de uma faca (fig. 39).

Fig. 39. — Um faca; a ponta é um angulo mixtilineo.

O **angulo** *curvilineo* póde ser *convexo* (fig. 40), *concavo* (fig. 41) ou *convexo-concavo* (fig. 42).

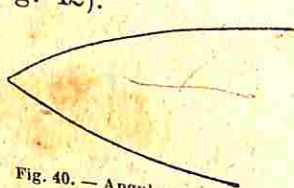



Fig. 40. — Angulo curvilineo convexo.

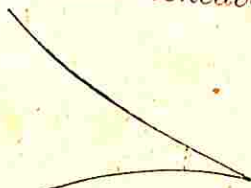



Fig. 41. — Angulo curvilineo concavo.

O **angulo** *mixtilineo* póde ser *convexo* (fig. 43) ou *concavo* (fig. 44).

Em relação á somma de suas grandezas os

angulos são *complementares* ou *supplementares*.

Fig. 42. — Angulo curvilineo convexo-concavo.

Fig. 43. — Angulo mixtilineo convexo.

O **angulo** *complementar* (fig. 45) é aquelle que, junto a um outro **angulo,** fórma um **angulo** *recto*.

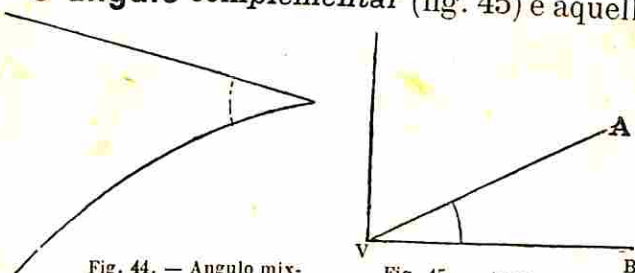



Fig. 44. — Angulo mixtilineo concavo.

Fig. 45. — AVB: angulo complementar.

O **angulo** *supplementar* (fig. 46) é o que falta a outro **angulo** para formar dois **angulos** *rectos.*

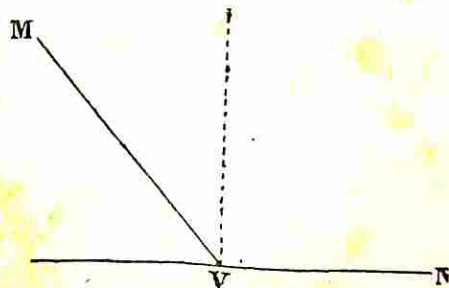



Fig. 46. — MVN: angulo supplementar.

Synopse

Os **angulos** podem ser considerados :

1.º — Conforme a sua grandeza.

Angulos . . . . { *obtusos.* / *agudos.* / *rectos.*

2.º — Conforme a natureza de seus lados

Angulos . . .
- *rectilineos.*
- *curvilineos* . . . { *convexos.* / *concavos.* / *convexo-concavos.*
- *mixtilineos* . . . { *convexos.* / *concavos.*

3.º — Em relação á somma de suas grandezas.

Angulos . . . . { *complementares.* / *supplementares.*

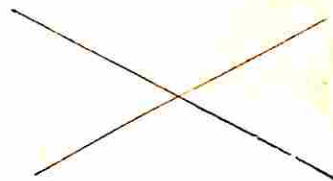
Dois **angulos** formados, um pelo prolongamento dos lados do outro, são *oppostos pelo vertice* (fig. 47).

Dois **angulos** *oppostos pelo vertice* são eguaes.

Fig. 47. — Angulos oppostos pelo vertice.

Os **angulos** são ***adjacentes*** quando têm um lado commum a ambos e são formados do mesmo lado de uma recta (fig. 48).

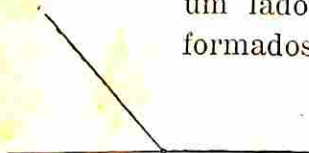



Fig. 48. Angulos adjacentes.

A *grandeza* de um **angulo** depende exclusivamente do afastamento ou approximação de seus *lados*.

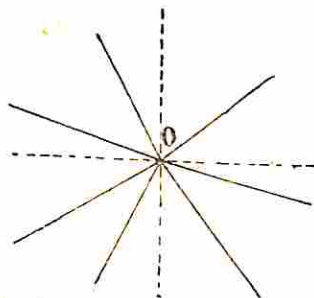
O comprimento dos *lados* de um **angulo** nada influe em sua *grandeza*.

Os **angulos** formados ao redor de um ponto equivalem a quatro **angulos** ***rectos*** (fig. 49).

Fig. 49. — Angulos formados ao redor de um ponto equivalem a quatro angulos rectos.

Os **angulos** formados do mesmo lado de

uma recta e ao redor de um ponto tomado sobre esta recta equivalem a dois **angulos** *rectos* (fig 50).

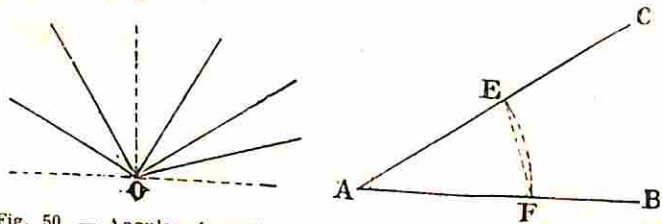



Fig. 50. — Angulos formados ao redor de um ponto e do mesmo lado de uma recta equivalem a dois angulos rectos.

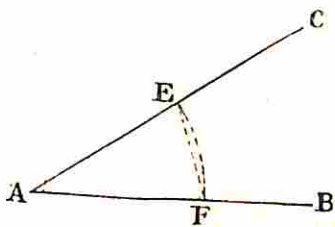



Fig. 51.

Problema I. — Construir um angulo egual a outro angulo dado (*).

Seja CAB o **angulo** dado (fig. 51). Com um raio qualquer e do ponto A, como centro, descrevamos o arco de

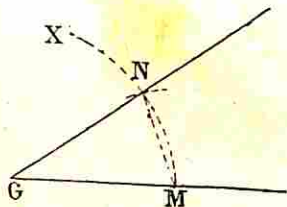



Fig. 52.

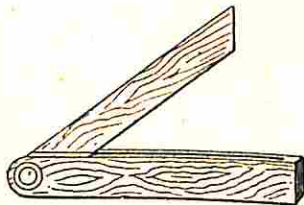



Fig. 53.

ircumferencia de circulo EF comprehendido pelos *lados* do **angulo.**

Com o mesmo raio e do ponto G (fig. 52) tracemos a curva MX, meçamos com o compasso a distancia EF e

(*) Para medir e reproduzir um angulo, alguns operarios servem-se de um utensilio chamado falso esquadro ou suta fig. 53).

appliquemol-a em MX: acharemos o ponto N que, ligado ao ponto G, resolverá o problema.

Problema 2. — Traçar a bissectriz de um angulo ou dividil-o em duas partes eguaes.

Do ponto A, com um raio qualquer, descrevamos o arco MN. Dos pontos M e N, como centros (fig. 54), e com um mesmo raio, descrevamos os arcos que determinam o ponto G o qual, ligado ao *vertice* do **angulo,** isto é, ao ponto A, nos dará a *bissectriz* pedida.

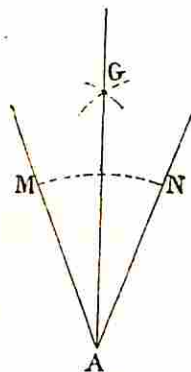
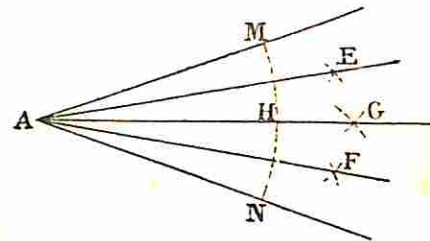



Fig. 54.

Fig. 55.

Problema 3. — Dividir um angulo em quatro, oito, dezeseis, trinta e duas partes eguaes.

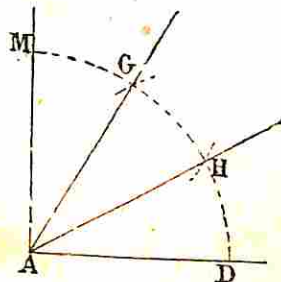
Para resolver este problema, tiremos a *bissectriz* do **angulo** (fig. 55), depois dividamos cada metade do **angulo** em duas partes eguaes e prosigamos nesta operação até encontrar a divisão desejada.

Problema 4. — Dividir um angulo recto em tres partes eguaes.

Fig. 56.

Do *vertice* A (*fig.* 56) como centro, e com um raio qual-

quer, descrevamos o arco MD; dos pontos M e D. como centros, e com o mesmo raio, marquemos os pontos H e G, os quaes unidos ao *vertice* A, resolverão o problema.

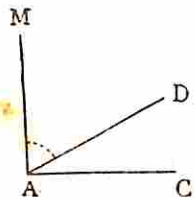



Fig. 57.

Problema 5. — Dado um angulo agudo, achar o seu complemento.

Seja DAC o **angulo** *agudo* (fig. 57). Levantemos com o esquadro e a regua, pelo *vertice*, uma linha perpendicular AM. O **angulo** MAD é o *complemento* do **angulo** DAC.

Problema 6. — Dado um angulo obtuso, achar o seu supplemento.

Seja MDA o **angulo** *obtuso*, (fig. 58). Prolonguemos o *lado* DA para a esquerda e acharemos o **angulo** MDN *supplemento* de MDA.

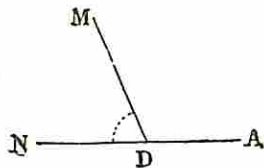



Fig. 58.

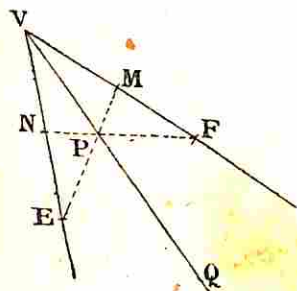
Problema 7. — Dividir um angulo em duas partes eguaes sem auxilio do compasso. Seja V o angulo (fig. 59).

Marquemos com uma tira de papel, sobre um lado, as distancias VM e MF e reproduzamol-as no outro lado do angulo em VN e NE. Tracemos as rectas ME e NF. A recta VPQ divide o angulo V em duas partes eguaes.

Fig. 59.

Problema 8. — Construir um angulo egual á somma de dois angulos dados.

Sejam M e N os dois angulos dados (fig. 60).

Sobre uma recta marquemos um ponto A (fig. 61) e com um raio arbitrario tracemos os arcos EF, GH e BV.

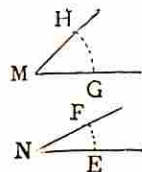



Fig. 60.

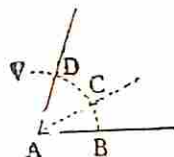



Fig. 61.

Reproduzamos em BC o arco EF e em CD o arco GH. O angulo DAB resolve o problema.

Problema 9. — Construir um angulo egual á differença de dois angulos dados.

Sejam A e B os dois angulos dados (fig. 62).

Sobre uma recta marquemos um ponto C (fig. 63) e com

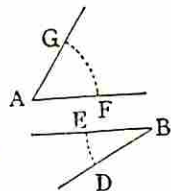



Fig. 62.

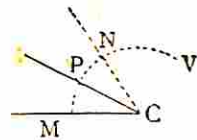



Fig. 63.

um raio arbitrario descrevamos os arcos DE, FG e MV.

Reproduzamos em MN o arco FG e em NP o arco ED O angulo PCM resolve o problema.

EXERCICIOS

1. — Flóra! traça um angulo.

2. — Como se chama o ponto de encontro d'estas duas linhas? — e que nome recebem estas linhas?

3. — Como designamos um angulo?

4. — Como se dividem os angulos?
5. — Traça um angulo recto; — um angulo agudo; — um angulo obtuso.
6. — Qual dos tres o maior? — o menor?
7. — Mostra um angulo recto; — um angulo agudo; — um angulo obtuso.
8. — Que é uma bissectriz?
9. — Como se classificam os angulos segundo as linhas que os formam?
10. — Que é um angulo rectilineo? um angulo curvilineo? — um angulo mixtilineo?
11. — Traça um angulo rectilineo; um curvilineo; um mixtilineo.
12. — Como se dividem os angulos curvilineos?
13. — Traça os angulos curvilineos que conheces.
14. — Como se dividem os angulos mixtilineos? — traça-os.
15. — Que é um angulo complementar?
16. — Que é um angulo supplementar?
17. — Que são angulos adjacentes?
18. — De que depende a grandeza de um angulo?
19. — A que é egual a somma dos angulos formados ao redor de um ponto?
20. — A que é egual a somma dos angulos formados do mesmo lado de uma recta e ao redor de um ponto situado na mesma recta?
21. — Traça a bissectriz de um angulo recto; — de um angulo obtuso; — de um angulo agudo.
22. — Divide um angulo agudo em quatro partes eguaes.
23. — Divide um angulo recto em tres partes eguaes.
24. — Divide um angulo obtuso em oito partes eguaes.
25. — Como se chama o utensilio de que se servem alguns operarios para medir e reproduzir um angulo?
26. — Traça a bissectriz de um angulo sem auxilio de compasso.
27. — Se um de dous angulos adjacentes é recto, que é o outro?
28. — Se um de dous angulos adjacentes é agudo, que é o outro?
29. — Se um de dous angulos adjacentes é obtuso, que é o outro?

30. — Dobra uma fôlha de papel de sorte que tenhas: 1.º um angulo recto; 2.º um angulo obtuso; 3.º um angulo agudo.
31. — Faze com o compasso e a regua um angulo duplo d outro.
32. — Os cantos d'este bilhete postal são agudos? — que são? — porque?
33. — Traça dois angulos rectilineos quaesquer. Qual o maior? — porque?
34. — Que angulo formam os ponteiros de um relogio, quando são tres horas? — e tres e cinco minutos?
35. — Que angulo formam os ponteiros de um relogio quando são nove horas e meia?
36. — Traça um angulo agudo. O complemento d'esse angulo é agudo? — porque?
37. — Traça um outro angulo agudo. O supplemento é agudo? — que é? — porque?
38. — Um angulo verticalmente opposto a um agudo, que é? — porque?
39. — Traça um angulo qualquer. Agora o angulo opposto pelo vertice.
40. — Se dois angulos verticalmente oppostos são agudos, que são os outros dois? — se são rectos, que são os outros dois?
41. — Traça dois angulos quaesquer; traça um terceiro egual á somma dos dois.
42. — Traça agora um angulo egual á differença dos dois.

———

CAPITULO III

SUMMARIO : **Perpendiculares e obliquas. — Problemas.**

PERPENDICULARES E OBLIQUAS.

Se uma recta encontra uma outra e fórma com esta um angulo recto, estas rectas são **perpendiculares** entre si; e se fórma um angulo agudo ou obtuso, são **obliquas.**

Synopse

Uma linha recta encontra outra e fórma	*angulo recto, é perpendicular.*		
	angulo. . .	*agudo ou obtuso*	*é obliqua.*

De um ponto fóra de uma linha recta, podemos abaixar (*) uma **perpendicular** sobre esta recta, e só podemos abaixar uma.

O esquadro em fórma de **T** usado pelos desenhistas nos mostra duas linhas **perpendiculares** entre si, um trado (fig. 64).

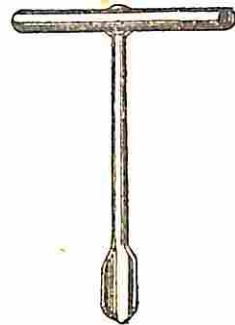



Fig. 64. — Um trado : duas linhas perpendiculares entre si.

Se de um ponto situado fóra de uma recta abaixarmos uma **perpendicular** e diversas **obliquas** sobre essa recta, a **perpendicular** será menor que qualquer **obliqua;** as **obliquas** que se afastarem egualmente do pé da **perpendicular** são eguaes, e a que se afastar mais do pé da **perpendicular** será a maior.

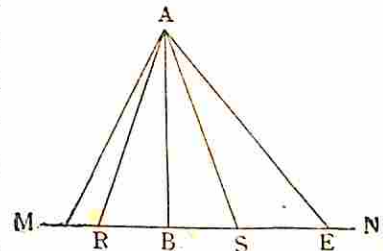



Fig. 65.

(*) Abaixar, significa : começar a perpendicular de um ponto situado fóra de uma recta, quer esteja este ponto á direita ou á esquerda de uma linha vertical, acima ou abaixo de uma linha horizontal.

D'essa verdade resulta que a menor distancia do ponto A á recta MN (fig. 65) é a **perpendicular** AB; as distancias AR e AS são eguaes, e a distancia AE é a maior.

Problema 10.—De um ponto situado fóra de uma recta, abaixar uma perpendicular á mesma recta.

1.ª Solução (com a regua e o esquadro):

Fig. 66.

Façamos coincidir uma aresta da regua com a recta AB (fig. 66), e escorreguemos o lado menor do esquadro pela regua até o lado maior encontrar o ponto O. Tracemos a recta OM e teremos resolvido o problema.

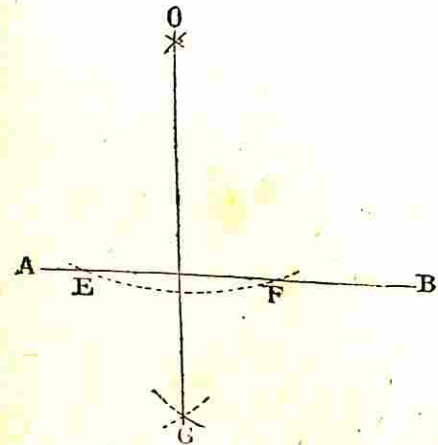
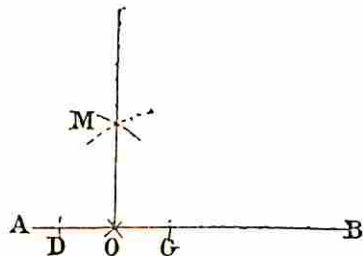
2.ª Solução (com a regua e o compasso):

Façamos centro no ponto O e com um raio maior que a distancia em linha recta d'este ponto á recta AB (fig. 67) descrevamos um arco que córte essa recta em dois pontos E e F, dos quaes, como

Fig. 67.

centros e com um raio maior do que a metade de EF, determinemos o ponto G, o qual ligado ao ponto O nos dá a **perpendicular** pedida.

Problema 11. — Por um ponto tomado sobre uma recta, levantar uma perpendicular a esta recta.

1.ª Solução (com a regua e o compasso):

A partir do ponto O (fig 68) marquemos duas distancias eguaes OD e OG.

Fig. 68.

Dos pontos D e G, como centros, e com um raio maior que OD ou OG, descrevamos dois arcos que determinem o ponto M. A recta OM resolve o problema.

2.ª Solução (com a regua e o esquadro):

Façamos coincidir uma aresta da regua com a recta AB (fig. 69), appliquemos o vertice do angulo recto do esquadro no ponto O, o lado menor do mesmo esquadro contra a regua, e levantemos a recta OM, que resolve o problema.

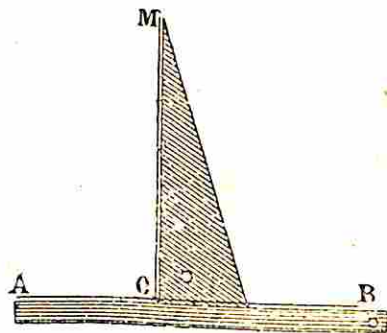



Fig. 69.

Problema 12. — Levantar uma perpendicular pela extremidade de uma recta cujo prolongamento não possamos traçar.

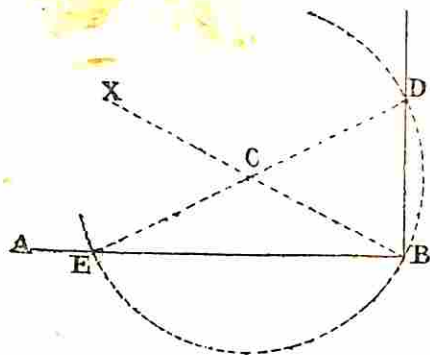
1.ª Solução. — Tiremos, pelo ponto B (fig. 70), uma obliqua BX; num ponto qualquer C d'esta obliqua façamos centro e tracemos uma circumferencia que passe pelo extremo B e córte a recta AB em um ponto E.

Unamos o ponto E ao ponto C por uma recta que, prolongada, determine o ponto D. A recta BD é a **perpendicular** pedida.

Fig. 70.

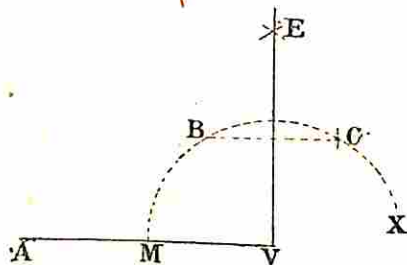
2.ª Solução. — Seja AV a recta dada (fig. 71). Da extremidade V e com um raio qualquer VM descrevamos o arco MX.

A partir do ponto M, com o mesmo raio VM determinemos o ponto B e, a partir d'este ultimo, o ponto C.

Fig. 71.

Unamos o ponto B ao ponto C e façamos passar pelo meio da recta BC uma perpendicular. A recta VE é a perpendicular pedida.

3.ª Solução. — Seja M a extremidade de uma recta (fig. 72).

Appliquemos de M até N tres medidas eguaes a uma unidade qualquer (3×1 centimetro, por exemplo). Façamos centro em M e com um raio egual a quatro vezes a mesma unidade (4×1 centimetro) descrevamos um arco, e do ponto N, como centro e com um raio egual a cinco vezes a mesma unidade (5×1 centimetro), determinemos o ponto P.

PM é a perpendicular pedida.

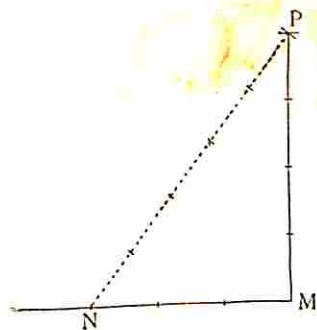



Fig. 72.

Problema 13. — Dividir uma recta em duas partes eguaes ou fazer passar uma perpendicular pelo meio de uma recta.

Façamos centro em A e B (fig. 73), e com um raio maior que a metade da recta AB determinemos os pontos C e D pelos quaes passa a recta CD, isto é, a **perpendicular** que divide a recta AB em duas partes eguaes.

Para dividir uma recta em quatro, oito, dezeseis, trinta e duas partes eguaes, bastará dividirmos cada metade, quarta parte, oitava parte, successivamente ao meio.

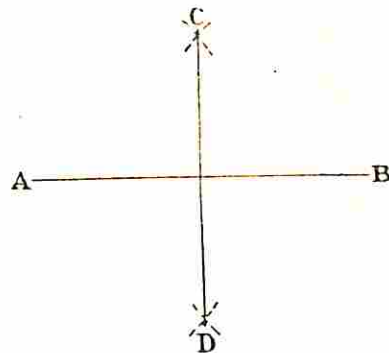



Fig. 73.

Problema 14. — Traçar uma perpendicular a uma recta, por um ponto dado fóra d'essa recta e a pouca distancia de uma das extremidades.

1.ª Solução. — Seja A o ponto dado a pouca distancia da extremidade C (fig. 74) da recta CB.

Com um raio C A e com o centro em C descrevamos um arco; e com um raio egual a B A e centro em B tracemos

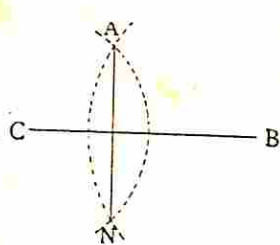



Fig. 74.

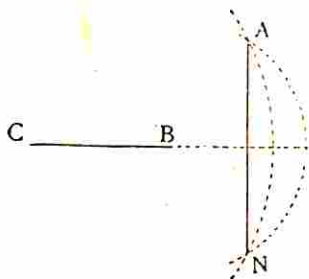



Fig. 75.

outro arco que determine o ponto N. Tracemos A N, que é a perpendicular pedida.

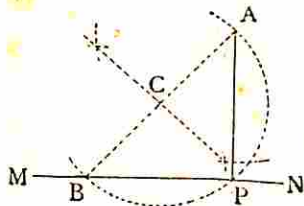
2.ª *Solução.* — (A perpendicular cahirá no prolongamento da recta). Centro em C e com o raio C A, (fig. 75), tracemos um arco, centro em B e com o raio BA descrevamos outro arco que determine o ponto N.

A N é a perpendicular pedida.

2.° processo da 1.ª Solução. — Tomemos sobre a recta MN (fig. 76) um ponto qualquer B e unamol-o ao ponto A.

Dividamos B A ao meio e fazendo centro em C (meio de B A), com um raio C A, descrevamos o arco A P B que corta MN no ponto P.

Fig. 76.

A recta A P é a perpendicular pedida.

Problema 15. — **Em uma recta dada, determinar um ponto que seja equidistante de dois outros, situados fóra dessa recta.**

Sejam M e N os pontos situados fóra da recta A B (figs. 77 e 78.

Tracemos a recta M N e façamos passar pelo meio uma

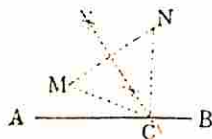



Fig. 77.

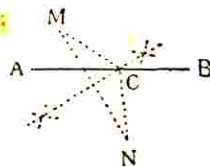



Fig. 78.

perpendicular que, prolongada, determinará na recta AB o ponto C pedido, porquanto $MC = NC$.

Problema 16. — Os proprietarios de duas casas que se acham situadas, cada uma a certa distancia das margens de um rio, querem fazer uma ponte que fique equidistante das duas moradas: pede-se o logar em que deverá ser construida a referida ponte.

P e R são as duas casas (fig. 79).

Tracemos a recta P R e dividamol-a ao meio por uma

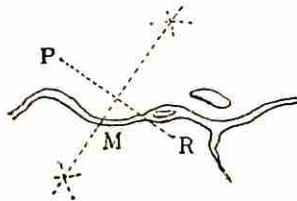



Fig. 79.

perpendicular que determinará o ponto M equidistante de P e de R.

No ponto M é que deverão construir a ponte desejada.

Problema 17. — Traçar, de dois pontos dados, linhas rectas que se encontrem em uma outra recta, formando com esta ultima, angulos eguaes.

Sejam A e B os dois pontos e M N a recta dada, (fig. 80).

Abaixemos do ponto A uma perpendicular á recta M N e façamos EC = AE.

Liguemos C a B e A a F.

AF e BF formam com MN angulos eguaes.

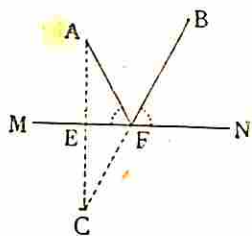



Fig. 80.

EXERCICIOS

1. — Olavo! Quando uma recta encontra uma outra, quaes são as posições que póde occupar em relação a essa outra?
2. — Mostra uma perpendicular; — uma obliqua.
3. — Uma perpendicular está sempre em posição vertical?
4. — Traça uma perpendicular em posição inclinada.
5. — Que é um esquadro? — para que serve? — e a regua?
6. — Traça uma perpendicular com a regua e o esquadro.
7. — Uma obliqua, que angulo fórma na extremidade de uma recta horizontal?
8. — Exemplos.
9. — E no meio de uma recta vertical?
10. — Exemplos.
11. — Que quer dizer abaixar uma perpendicular?
12. — Faze passar pelo meio de uma recta de 40m/m de comprimento uma perpendicular.
13. — Procura um ponto egualmente distante das extremidades de uma recta de 36 millimetros de comprimento.
14. — Por um ponto dado em uma recta e a 20 millimetros de distancia de uma de suas extremidades, levanta uma perpendicular a essa recta.
15. — Levanta uma perpendicular por uma das extremidades de uma recta cujo prolongamento não possas traçar.
16. — Marca sobre uma recta um ponto que seja o mais proximo de um outro ponto dado fóra d'essa recta.

17. — Cita alguns nomes de cousas que tenham rectas perpendiculares.
18. — Cita alguns nomes de cousas que tenham rectas obliquas.
19. — Traça uma recta e dois pontos quaesquer, fóra d'essa recta. Determina agora nessa recta o ponto equidistante dos dois primeiros.
20. — Um poste telephonico que é relativamente ao sólo?
21. — Traça uma recta, marca um ponto fóra, e d'esse ponto tira uma perpendicular á essa recta e diversas obliquas. Qual a distancia menor do ponto á recta? — qual a maior?
22. — Cita os objectos em que vês as rectas verticaes nas tres posições.
23. — Mostra-me a tua regua em posição vertical, horizontal e inclinada.

CAPITULO IV

SUMMARIO : **Parallelas. — Linhas convergentes. — Linhas divergentes. — Problemas.**

PARALLELAS. Duas ou mais linhas situadas em uma mesma superficie plana, seguindo egual direcção e conservando entre si, duas a duas, a mesma distancia, tomam o nome de **parallelas** (figs. 81, 82, 83, 84, 86, 87)

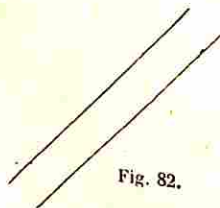
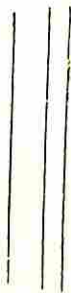



Fig. 81.

Fig. 82.

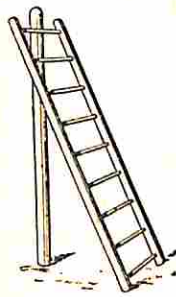
Fig. 83.

Os trilhos por onde correm as locomotivas ou os bonds nunca se encontram, por serem linhas **parallelas.** As ruas do Ouvidor e do Rosario são **parallelas** entre si.

Fig. 84.

Na fig. 85 os degráus da escada são parallelos entre si e os banzos o são tambem entre si; o poste é perpendicular ao sólo, a escada está obliqua ao sólo e os degráus são perpendiculares aos banzos.

Fig. 85.

Tracemos duas perpendiculares a uma mesma recta; estas perpendiculares conservam a mesma distancia entre si e, por mais que se prolonguem, nunca se encontram : são **parallelas,** o que nos mostra que duas perpendiculares a uma mesma recta são **parallelas** entre si (fig. 88).

Duas linhas **parallelas** são equidistantes em todo o comprimento.

Duas **parallelas** cortadas por uma obliqua, formam com esta obliqua, oito angulos,

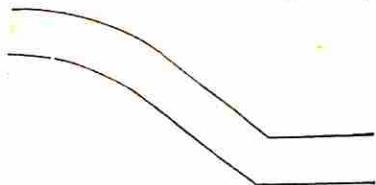



Fig. 86.

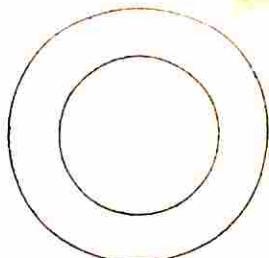



Fig. 87.

sendo quatro agudos eguaes e quatro obtusos tambem eguaes (fig. 89).

Os angulos **m, b, c, n** (fig. 89), chamam-se *internos* porque têm a abertura para dentro da figura, e os angulos **a, e, r, d** *externos* porque têm a abertura para fóra da figura.

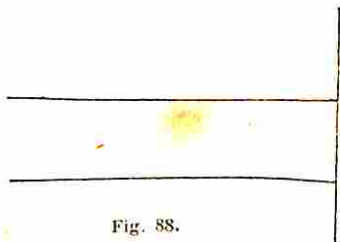
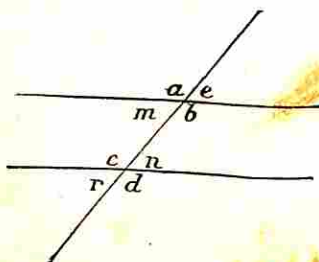



Fig. 88.

Fig. 89.

Estes angulcs comparados dous a dous, são classificados do seguinte modo :

Os angulos **m** e **n, c** e **b** são *alternos-internos;* **a** e **d, e** e **r** *alternos-externos;* **e** e **n, b** e **d, a** e **c, m** e **r** *correspondentes;* **b** e **n** ou **m** e **c** *internos de um lado* da obliqua; **a** e **r** *externos de um lado;* **e** e **d** *externos do outro lado.*

Duas rectas parallelas cortadas por uma obliqua formam angulos :

- *alternos-internos eguaes.*
- *alternos-externos eguaes.*
- *correspondentes eguaes.*
- *internos de um mesmo lado supplementares.*
- *externos de um mesmo lado supplementares.*

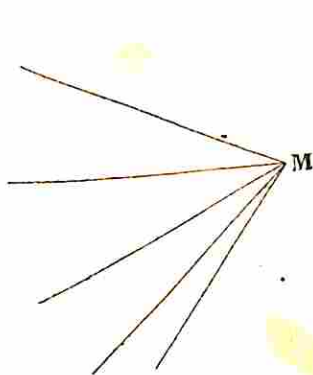



Fig. 90.

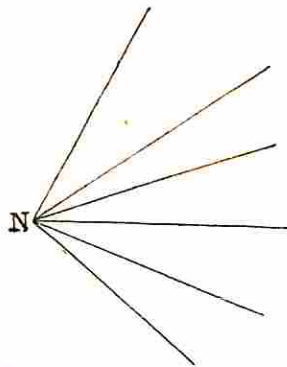



Fig. 91.

Duas ou mais linhas rectas que, não tendo ponto algum de commum e prolongadas, se encontram : são ***convergentes*** (fig. 90).

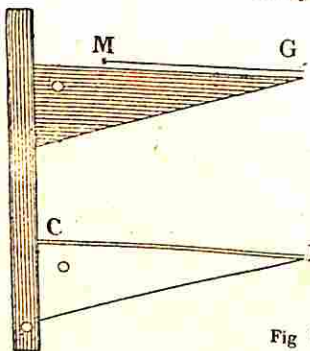
O ponto de encontro M chama-se *ponto* de **convergencia** (fig. 90).

Duas ou mais linhas rectas que, partindo de um mesmo *ponto*, tomam diversas direcções, chamam-se ***divergentes*** (fig. 91).

O ponto N d'onde partem as linhas, chama-se *ponto* de **divergencia** (fig. 91).

Fig. 92.

O *vertice* de um angulo é um *ponto* de ***divergencia.***

Problema 18. — Traçar uma parallela a uma recta dada, por um ponto dado.

1.ª Solução (com o compasso e a regua):

Do ponto dado M (fig. 92) descrevamos um arco de circumferencia N G; do ponto N, e com o mesmo raio M N, descrevamos o arco M C; tomemos N G egual a M C, unamos o ponto M ao ponto G.

Fig 93.

A recta M G é a **parallela** pedida.

2ª. Solução (com a regua e o esquadro): Appliquemos um dos lados do angulo recto do esquadro sobre a recta C N (fig. 93); façamos escorregar o esquadro pela regua até o ponto M, pelo qual tracemos a recta M G **parallela** a C N.

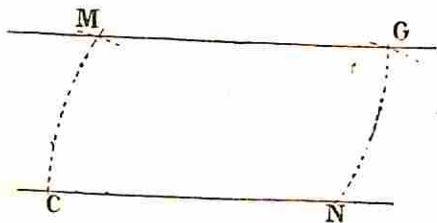
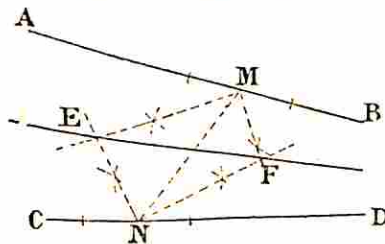



Fig. 94.

Problema 19. — Dadas duas rectas convergentes, traçar a bissectriz sem recorrer ao ponto de convergencia.

1.ª Solução. — Sejam A B e C D (fig. 94) as rectas convergentes. Tracemos uma secante M N e depois a bissectriz de cada um dos angulos A M N; C N M; B M N; D N M. Unamos o ponto E ao ponto F e teremos a *bissectriz* pedida.

2.ª Solução. — Sejam B A e D C as rectas convergentes (fig. 95). Do ponto B levantemos uma perpendicular á recta B A e do ponto D uma perpendicular á recta D C. Sobre cada uma d'estas perpendiculares marquemos a partir dos pontos B e D duas distancias eguaes B N e D M. Pelo ponto N tracemos uma parallela a B A e pelo ponto M uma outra a D C. Dividamos o angulo M P N em duas partes eguaes, e a recta P Q é a *bissectriz* pedida.

Fig. 95.

3.ª Solução. — A B e C D são as rectas convergentes (fig. 96). Tomemos sobre a recta A B um

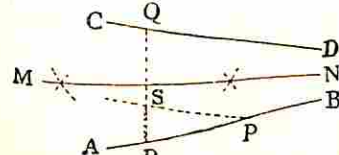



Fig. 96.

ponto P qualquer e d'ahi tracemos uma parallela a C D.

Do ponto P, como centro e com um raio arbitrario, determinemos R e S.

Unamos R a S e prolonguemos essa recta até Q.

A perpendicular M N, pelo meio de Q R, é a bissectriz pedida.

Problema 20. — De um ponto dado fóra de uma recta traçar uma outra recta que forme com a primeira um angulo egual a um outro angulo dado.

Seja A B a recta, M o ponto e N o angulo (fig. 97). Tracemos do ponto M uma recta parallela a A B e formemos pelo mesmo ponto um angulo C M D egual ao angulo N. A recta M P fórma com A B o angulo M P B = C M D e portanto ao angulo N.

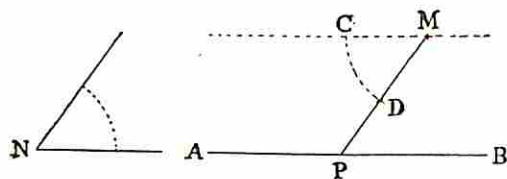



Fig. 97.

Problema 21. — De um ponto dado fóra do espaço comprehendido por duas parallelas, traçar uma recta cujo segmento (*) entre as mesmas parallelas seja egual a uma distancia dada.

Seja R o ponto dado, A B e C D as parallelas, e M N a distancia dada (fig. 98).

Tomemos sobre A B um ponto qualquer S e, com o centro nesse ponto e raio egual a M N, cortemos a recta C D em T. Do ponto R tiremos a recta R F parallela a S T e cujo segmento E F = M N.

(*) SEGMENTO de uma recta, isto é, secção, porção, parte da recta.

Problema 22. — Por um ponto dado entre duas rectas convergentes, fazer passar uma terceira recta cujas extremidades fiquem situadas nas duas primeiras e de modo que o ponto dado fique no meio d'essa recta.

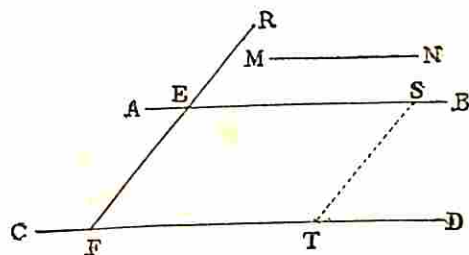



Fig. 98.

Seja M o ponto situado entre as rectas E F e G H (fig. 99). Abaixemos do ponto M sobre a recta G H a perpendicular M C e, no seu prolongamento na direcção de C para M, reproduzamos a distancia M C em M D.

Do ponto D tracemos uma parallela a G H e do ponto A (intersecção d'essa parallela com a recta E F) tracemos a recta AB cujas extremidades estão sobre as rectas convergentes e cujo meio é o ponto M.

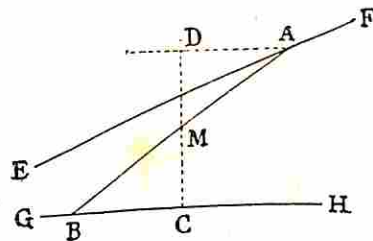



Fig. 99.

Problema 23. — De um ponto dado fóra do angulo formado por duas rectas convergentes, traçar uma terceira recta que forme, com essas duas primeiras, angulos eguaes.

Seja M o ponto dado, A B e C D as rectas convergentes (fig. 100).

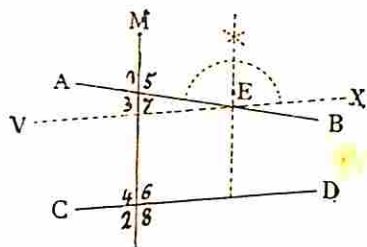



Fig. 100.

Tracemos uma recta qualquer V X de modo que seja parallela a C D e determine o ponto E sobre A B. Tracemos a bissectriz do angulo A E X e do ponto M façamos partir uma recta parallela a essa bissectriz.

Essa ultima recta fórma, com A B e C D, angulos eguaes : 1 = 7 = 2 = 6 ; 3 = 5 = 4 = 8.

EXERCICIOS

1. — Raul! mostra duas linhas parallelas.
2. — Traça duas linhas parallelas.
3. — Que são rectas parallelas ?
4. — Duas perpendiculares a uma mesma recta, que são, uma em relação á outra ?
5. — Quantos angulos fórmam duas parallelas cortadas por uma obliqua ? — Como se chamam ?
6. — Quando duas rectas seguem direcções diversas, que nome recebem ?
7. — Quando duas ou mais linhas rectas são convergentes ? — quando são divergentes ?
8. — Traça tres rectas convergentes ; — e quatro divergentes.
9. — Mostra o ponto de convergencia ; — e o ponto de divergencia.
10. — Traça uma recta parallela a uma outra por um ponto dado.
11. — Traça com a regua e o esquadro diversas parallelas a uma recta dada.
12. — Traça uma parallela a uma recta dada, de modo que a menor distancia de uma á outra seja de 40 millimetros.

13. — Traça duas curvas parallelas, á mão livre.
14. — Traça, á mão livre, duas linhas mixtas parallelas.
15. — Traça dous angulos rectos, um com os lados parallelos aos lados do outro.
16. — Podem duas superficies ser parallelas ?
17. — Podem, uma superficie curva e uma superficie plana, ser parallelas ?
18. — Uma linha recta e outra curva podem ser parallelas ?

CAPITULO V

SUMMARIO : **Triangulos rectilineos. — Casos de egualdade de triangulos. — Problemas.**

TRIANGULOS.

Uma superficie plana limitada por tres linhas chama-se **trilatero** ou **triangulo.**

Um **triangulo** ou **trilatero** póde ser *rectilineo, curvilineo* ou *mixtilineo.*

Um **triangulo** tem tres *angulos,* tres *lados* e tres *vertices*.

A tripeça (fig. 101) tem a fórma triangular; em musica ha um instrumento chamado triangulo, cuja fórma é triangular.

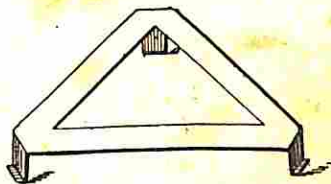



Fig. 101. — Uma tripeça : fórma triangular.

Os *angulos* de um **triangulo** designam-se por tres lettras collocadas em seus *vertices;* dizemos por exemplo, *angulo* A, *angulo* B,

angulo C (fig. 102), e um **triangulo** designa-se por tres lettras collocadas nos vertices de seus angulos, assim por exemplo : triangulo A B C (fig. 102).

A B C

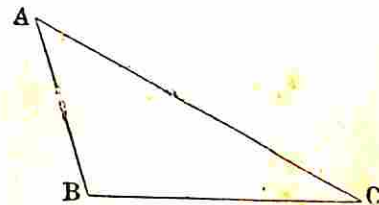



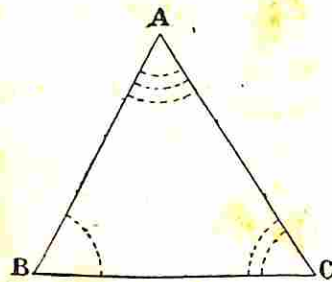
Fig. 102.

A somma dos *lados* de um **triangulo** chama-se *perimetro.*

A somma dos tres *angulos* é egual a dois angulos rectos.

A B C

Fig. 103.

Tracemos um **triangulo** qualquer (fig. 103) sobre cartão ou papel, recortemos os *angulos* d'este **triangulo,** ajuntemos como nos mostra a fig. 104. Os *angulos* ficam do mesmo lado da recta A B (fig. 104) e ao redor

A O B

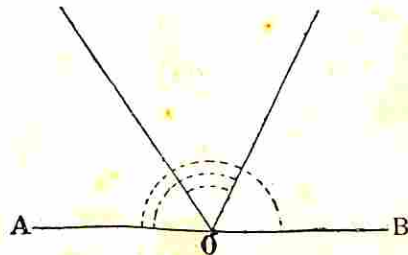



Fig. 104.

do ponto O : equivalem portanto a dois angulos rectos.

Qualquer lado de um **triangulo** póde servir-lhe de *base*.

A perpendicular abaixada de um dos *vertices* sobre a *base* ou sobre o prolongamento d'esta chama-se *altura* do **triangulo** (fig. 105).

A
B C

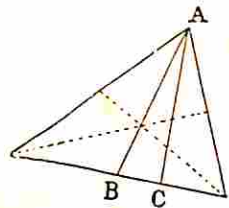



Fig. 105. — A recta AB é uma mediana e AC é uma altura.

A recta que une um dos *vertices* do **triangulo** ao meio do lado opposto chama-se *mediana* (fig. 105).

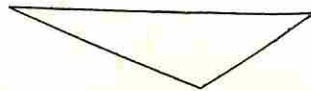



Fig. 106. — Triangulo escaleno.

Todo o **triangulo** tem tres *alturas*, tres *bissectrizes* e tres *medianas*.

Os triangulos em relação á grandeza de seus *lados* são :

Escalenos, se os lados são deseguaes (fig. 106).

Isosceles ou ***Symetricos***, se dois de seus lados são eguaes (fig. 107).

Equilateros, se os lados são eguaes (fig. 108).

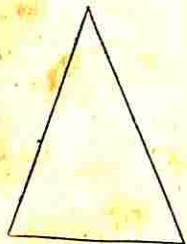



Fig. 107. — Triangulo isosceles.

Em relação á grandeza de seus angulos são :

Acutangulos, se todos os angulos são agudos (fig. 109); ***Obtusangulos***, se têm um angulo obtuso (fig. 110);

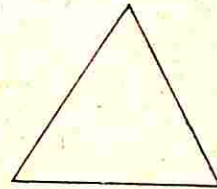



Fig. 108. — Triangulo equilatero.

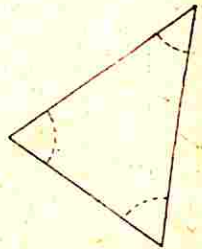



Fig. 109. — Triangulo acutangulo.

Rectangulos, se têm um angulo recto (fig. 111);

Equiangulos ou ***isogonos***, se todos os angulos são eguaes (fig. 112).

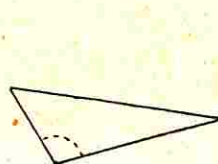



Fig. 110. — Triangulo obtusangulo.

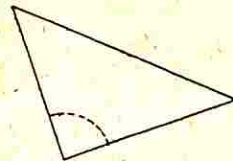



Fig. 111. — Triangulo rectangulo.

Todo o **triangulo** *equilatero* é *equiangulo*.

No **triangulo** *rectangulo* o lado opposto ao angulo recto chama-se *hypothenusa* e os lados d'esse angulo chamam-se *cathetos*.

Uma circumferencia póde ser *inscripta* ou *circumscripta* a um **triangulo**.

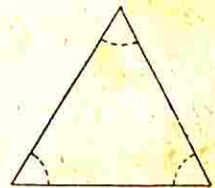



Fig. 112. — Triangulo equiangulo.

Synopse

Os triangulos dividem-se :

1.° Em relação á grandeza de seus lados.

Triangulos. . . { *Escalenos* ou *irregulares* / *Isosceles* ou *symetricos* / *Equilateros*

2.° Em relação á grandeza de seus angulos.

Triangulos. . . { *Acutangulos* / *Obtusangulos* / *Rectangulos* / *Equiangulos* ou *isogonos*

Casos de egualdade de triangulos

Dois triangulos são eguaes quando têm {

1.° Um angulo egual comprehendido entre dois lados respectivamente eguaes.

2.° Um lado egual adjacente a dois angulos respectivamente eguaes.

3.° Os tres lados respectivamente eguaes.

Problema 24. — Determinar o centro de um triangulo qualquer.

Seja ABD o triangulo (fig. 113).

Tiremos as bissectrizes dos angulos A e D.

Essas bissectrizes cortam-se em C que é o centro do triangulo, isto é, o ponto equidistante dos tres lados d'esse triangulo: se abaixarmos de C, perpendiculares a AB, BD e AD, verificaremos que ellas são eguaes.

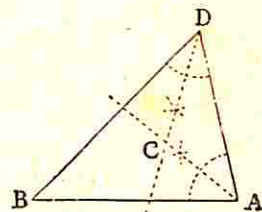



Fig. 113.

NOTA. — A bissectriz do angulo B tambem passa por C.

Problema 25. — Traçar a altura de um triangulo qualquer.

Seja MNP o triangulo (figs. 114 e 115).

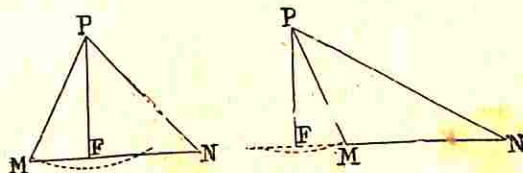



Fig. 114. Fig. 115.

Abaixemos do ponto P uma perpendicular PF sobre a base MN (fig. 114) ou sobre o seu prolongamento (fig. 115); essa perpendicular é a altura do triangulo.

Problema 26. — Dado um lado, construir um triangulo equilatero. Seja AB (fig. 116) o lado dado.

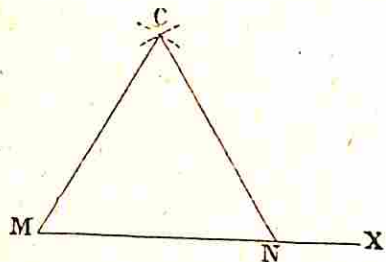
Fig. 116.

Tracemos uma recta qualquer

M X sobre a qual tomemos M N (fig. 117) egual a A B.

Façamos centro em M e N e com um raio egual a A B determinemos o ponto C, que, unido aos pontos M e N, resolverá problema.

Fig. 117.

Problema 27. — Traçar um triangulo equilatero conhecendo-se-lhe a altura.

Tracemos uma recta e, num ponto arbitrario C tomado sobre ella (fig. 118) façamos centro descrevendo com um raio qualquer o arco E F.

Centro em E e com o mesmo raio, determinemos o ponto G; tracemos de C uma recta que passe por G e depois a bissectriz do angulo G C E.

Appliquemos em C M a medida da altura dada e pelo ponto M façamos passar uma perpendicular a C M. O triangulo C D N resolve o problema.

Fig. 118.

Outro processo. — Seja MN (fig. 119) a altura.

Pelo ponto N façamos passar uma perpendicular e do ponto M, como centro, e com um raio qualquer descrevamos um arco. Do ponto A e com o mesmo raio, determinemos os pontos B e C. De A

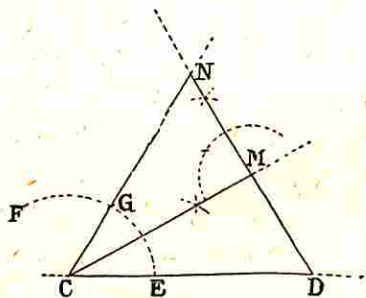
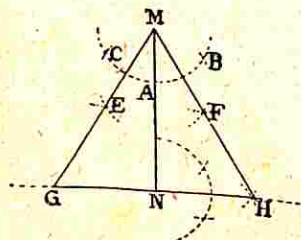



Fig 119.

e C marquemos E e de A e B, F. Do vertice M tiremos duas rectas, uma que passe por E e outra por F.

G H M é o triangulo pedido.

Problema 28. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e a altura.

Seja B a base e A a altura (fig. 120).

Sobre uma recta appliquemos M N (fig. 121) egual á base e façamos passar pelo meio de M N uma perpendicular de cujo pé C, reproduzamos em C D a medida da altura.

Unamos os pontos M e N ao ponto D e teremos resolvido o problema.

Fig. 121. Fig. 120.

Problema 29. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e um lado adjacente.

Sobre uma recta marquemos A B (fig. 122) egual á base conhecida.

Dos pontos A e B, como centros, e com um raio egual ao lado adjacente, determinemos o ponto C.

Unamos C a A e B e obteremos o triangulo pedido ABC.

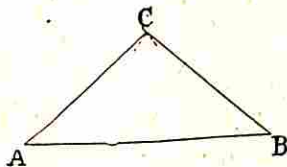



Fig. 122.

Problema 30. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e um angulo adjacente a esta base.

Seja M a base e E o angulo adjacente (fig. 123).

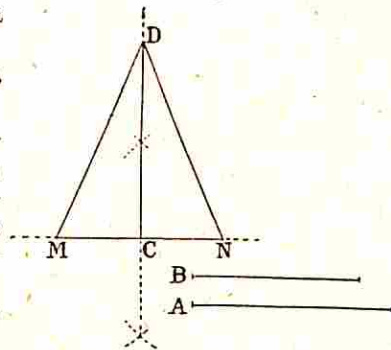
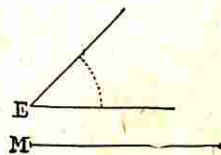
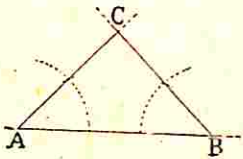



Fig. 123.

Tracemos uma recta e a partir de uma extremidade, reproduzamos em AB (fig. 124) a medida M.

Façamos em cada um dos pontos A e B um angulo egual ao angulo E.

Os lados d'esses angulos encontram-se em C e o triangulo ABC resolve o problema.

Fig. 124.

Problema 31. — Construir um triangulo isosceles, conhecendo-se a base e o angulo do vertice, isto é, o angulo opposto á mesma base.

Seja N a base e V o angulo do vertice (fig. 125).

Tracemos uma recta e, a partir de uma extremidade, reproduzamos em AB (fig. 126) a medida N. Façamos passar pelo meio de AB uma perpendicular e por um ponto arbitrario P tomado n'essa perpendicular, tracemos um angulo egual ao angulo dado V, de sorte que a bissectriz se confunda com a perpendicular.

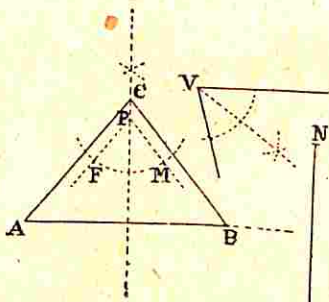



Fig. 126. Fig. 125.

Do ponto A tracemos uma parallela ao lado PF d'esse angulo e do ponto B outra parallela ao lado PM do mesmo angulo : essas duas rectas determinam o ponto C e formam o triangulo pedido ABC.

Outro processo. — Sobre uma recta appliquemos a medida AB egual a N (fig. 127) e no seu prolongamento façamos um angulo egual a V, (fig. 127) coincidindo o vertice com o ponto E (fig. 128).

Tracemos a bissectriz BM do angulo ABE e na extremidade A reproduzamos o angulo ABM.

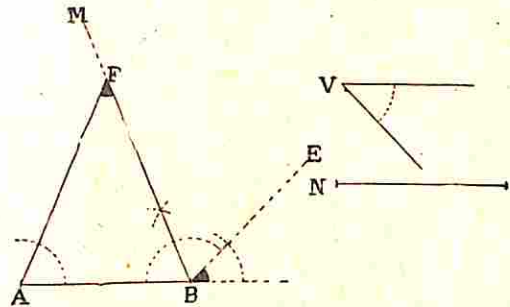



Fig. 128. Fig. 127.

O lado AF determina o vertice F do triangulo pedido ABF.

Problema 32. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e o raio do circulo inscripto.

Pelo meio de AB, base conhecida (fig. 129), façamos passar uma perpendicular e appliquemos MN egual ao raio do circulo inscripto. Com esse raio, e centro em N, descrevamos uma circumferencia de circulo.

De cada um dos pontos A e B, e com um mesmo raio AM, marquemos P e Q.

Do ponto A tiremos uma recta que passe por P e do ponto B, outra que passe por Q. O ponto C é o resultado do encontro d'estas duas rectas e ABC é o triangulo isosceles pedido.

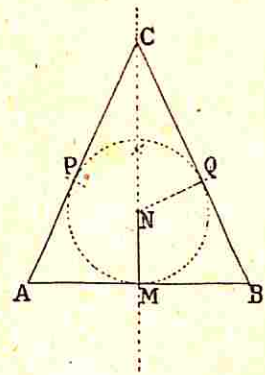
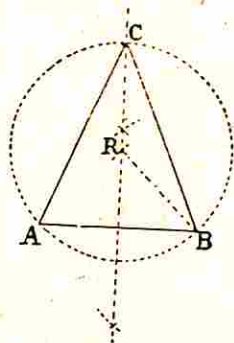



Fig. 129.

Problema 33. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a base e o raio do circulo circumscripto.

Pelo meio da base conhecida AB (fig. 130) façamos passar uma perpendicular.

Do ponto A ou B e com um raio egual ao do circulo circumscripto, determinemos o ponto R, do qual, como centro e com o mesmo raio RB, descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará o ponto C, vertice do triangulo pedido ABC.

Fig. 130.

Problema 34. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e um dos angulos da base.

Seja V o angulo (fig. 131) e AB a altura (fig. 132).

Pelo ponto B tracemos uma perpendicular á recta AB. Com um raio qualquer MV descrevamos um arco que determine o ponto N; unamos M a N e tracemos a bissectriz do angulo M.

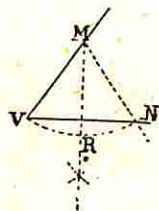



Fig. 131.

Façamos centro em A e com um mesmo raio MV descrevamos um arco.

Do ponto C, e com um raio egual a RV, determinemos os pontos E e F.

Tracemos as rectas AEP e AFQ, e resultará o triangulo isosceles PQA.

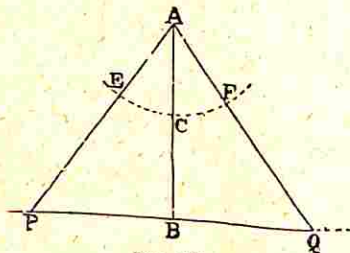



Fig. 132.

Problema 35. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e o perimetro.

Tracemos pelo meio da recta MN, perimetro conhecido (fig. 133), uma perpendicular e appliquemos em CB a medida da altura dada; unamos M e N a B.

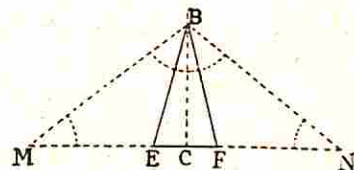



Fig. 133.

Façamos os angulos MBE e NBF eguaes, cada um, ao angulo M ou N.

EFB é o triangulo pedido.

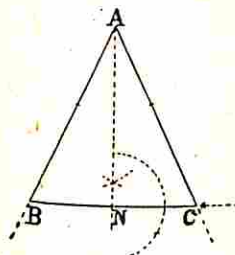
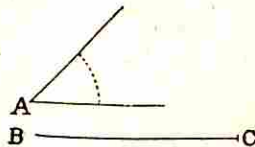
Problema 36. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se a altura e o angulo do vertice.

Tracemos a bissectriz do angulo dado A e sobre ella (fig. 134) appliquemos AN egual á altura conhecida. Façamos passar por N uma perpendicular a AN, a qual determinará nos lados do angulo os pontos B e C e resolverá o problema.

Fig 134.

Problema 37. — Construir um triangulo isosceles conhecendo-se um dos lados symetricos e um dos angulos da base.

Seja A um dos angulos da base e BC um dos lados symetricos (fig. 135).

Fig. 135.

Formemos em V um angulo egual ao angulo A e appliquemos em um de seus lados, a partir do vertice, a medida VD = BC.

Com o centro em D e o raio egual a DV, descrevamos

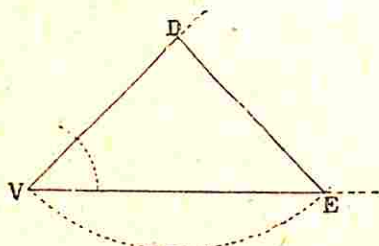



Fig. 136.

um arco que determine o ponto E, o qual, ligado ao ponto D, resolve o problema.

Problema 38. — Construir um triangulo conhecendo-se os tres lados. Sejam A B, C D, E F os lados (fig. 137). Sobre a recta MN (fig. 138) marquemos a partir da extremidade M, uma distancia MV = A B; do ponto M, com um raio egual a C D e do ponto V com um raio egual a E F, determinemos o ponto P. Unamos o ponto P aos pontos M e V, e teremos resolvido o problema.

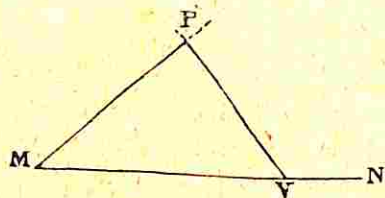
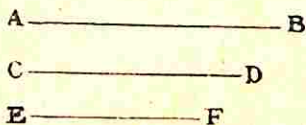



Fig. 137.

Fig. 138.

Problema 39. — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e o angulo por elles comprehendido.

B (fig. 139) é o angulo; EF e GH (fig. 140) são os lados conhecidos. Sobre uma recta indefinida, marquemos uma distancia AC (fig. 141), egual a EF. No ponto A façamos um angulo M A C egual ao angulo B, sobre A M e a partir do ponto A marquemos a distancia A N egual a G H; unamos o ponto N ao ponto C e teremos construido o triangulo pedido.

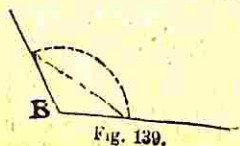
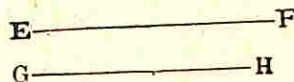
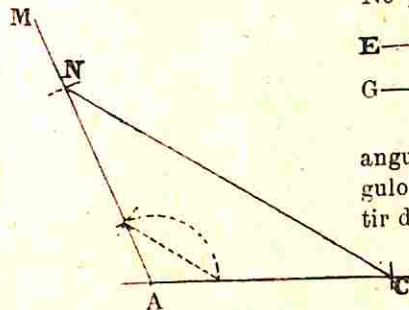



Fig. 139.

Fig. 140.

Fig. 141.

Problema 40. — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e o angulo opposto a um d'elles. Sejam M e N os lados e V o angulo dado (fig. 142).

Façamos um angulo A egual ao angulo V e appliquemos em A B (fig. 143) a medida do lado M.

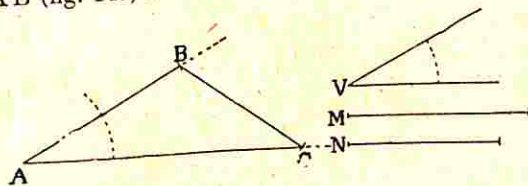



Fig. 143.

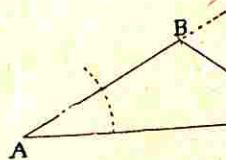



Fig. 142.

Com o centro em B e raio egual a N determinemos o ponto C. Unamos B a C e obteremos o triangulo pedido A C B.

Problema 41. — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e uma mediana.

1.º caso. — A mediana corresponde a um dos lados conhecidos.

Sejam A e R os lados e M a mediana (fig. 144).

Tracemos C B = A e, do ponto B como centro (fig. 145), com um raio egual a R descrevamos um arco de circulo.

A
R
M

Fig. 144.

Do ponto N, meio de C B, e com o raio egual a M, determinemos o ponto D.

Unamos este ponto a C e B e teremos o triangulo pedido C B D.

2.° caso. — A mediana corresponde ao lado desconhecido.

Tracemos uma recta C D (fig. 146) egual á mediana M (fig. 144) e prolonguemol-a de uma quantidade D N = C D.

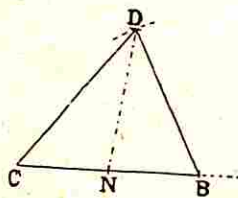
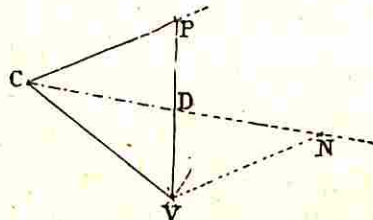



Fig. 145.

Fig. 146.

Façamos centro em C e com um raio egual a A (fig. 144) descrevamos um arco; de N, e com um raio egual a R (fig. 144) determinemos o ponto V, do qual tracemos as rectas V C e V N. Do ponto C tracemos uma recta parallela a V N e reproduzamos em C P a medida R. Unamos C a P. V P C é o triangulo pedido.

Problema 42. — Construir um triangulo conhecendo-se dois lados e uma altura.

A
B
M

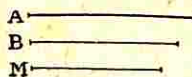



Fig. 147.

1.° caso. — A altura corresponde a um dos lados conhecidos.

A e B são os dois lados e M a altura (fig. 147).

Em uma recta marquemos E F = A e por um ponto R (fig. 148) levantemos-lhe uma perpendicular sobre a qual appliquemos R S = M.

Façamos passar por S uma parallela a E F e com o centro em F e raio B determinemos G; d'este ponto, e com o raio E F, determinemos D na recta parallela.

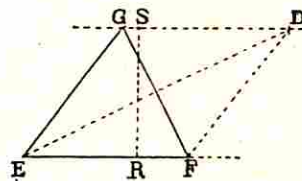



Fig. 148.

Os triangulos E F G, G D F, E F D ou G D E resolvem o problema.

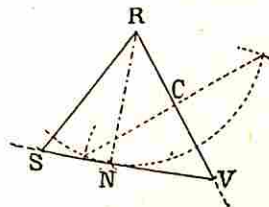
2.° caso. — A altura corresponde ao lado desconhecido. A e B são os dois lados e M a altura (fig. 147). Marquemos sobre uma recta a medida R V = A (fig. 149) e do ponto R, com um raio egual a M descrevamos um arco de circulo.

Dividamos R V ao meio e do ponto C, com um raio C V ou C R determinemos o ponto N no arco de circulo. Tiremos por V N uma recta.

Fig. 149.

Centro em R e com um raio egual a B marquemos o ponto S, o qual, unido a R, resolve o problema. R N é a altura.

Problema 43. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, a base e a altura.

Seja L o lado, B a base, e A a altura (fig. 150).

B
L
A

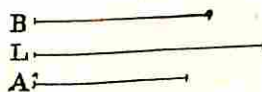
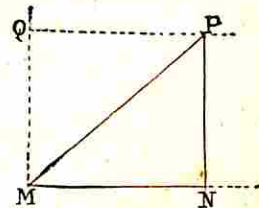



Fig. 150.

Fig. 151.

Marquemos sobre uma recta a distancia M N (fig. 151)

= B; levantemos por um ponto qualquer d'essa recta, M por exemplo, uma perpendicular sobre a qual, e a partir de M, appliquemos M Q (medida da altura A). Façamos partir de Q uma parallela a M N e fazendo centro em M, com um raio egual a L marquemos o ponto P. Tracemos as rectas P M e P N.

O triangulo pedido é M N P.

Problema 44. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado e duas alturas.

1.° caso — As duas alturas correspondem aos lados desconhecidos.

Seja A B o lado (fig. 152).

Com o raio A C. egual a uma das alturas, descrevamos

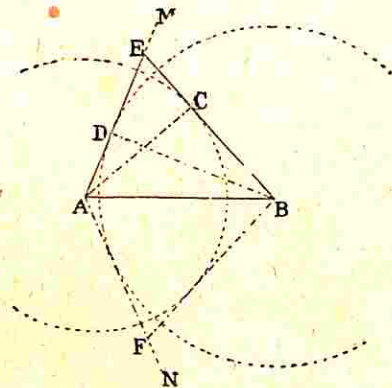



Fig. 152.

uma circumferencia; do ponto B e com o raio B D, egual a outra altura, descrevamos outra circumferencia.

De A tracemos as rectas A M e A N tangentes á circumferencia de centro B e d'este ponto tiremos as rectas B E e B F tangentes á circumferencia de centro A. Qualquer um dos triangulos A B E ou A B F resolve o problema.

2.° caso. — Uma das alturas corresponde ao lado conhecido. (*)

Tracemos uma recta M N (fig. 153) egual ao lado e, com um raio egual á altura que não corresponde a esse mesmo lado, descrevamos um arco.

Tracemos uma parallela á recta M N de modo que a distancia entre ellas seja egual á altura correspondente ao lado dado.

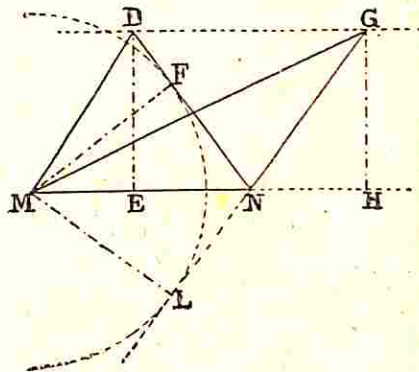



Fig. 153.

Da extremidade N tiremos as tangentes do arco. Essas tangentes determinam D e G na recta parallela a M N.

Qualquer um dos triangulos M N D ou M N G resolve o problema; as alturas do primeiro são D E e M F e as do segundo G H ou D E e M L ou M F.

Problema 45 — Construir um triangulo conhecendo-se os meios dos tres lados.

Unamos entre si os tres pontos A, B e C (meios dos lados do triangulo pedido) e por estes mesmos pontos (fig. 154) tracemos rectas parallelas aos lados oppostos, assim por exemplo, pelo ponto A a recta parallela a G B, etc

Estas tres rectas cortam-se nos pontos E, F e G e formam o triangulo pedido E F G.

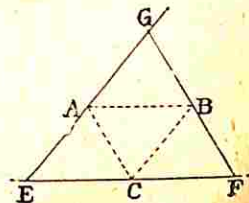



Fig. 154.

(*) Estes problemas devem ser ensinados depois que o discipulo conheça o traçado de tangentes.

Problema 46. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo e uma altura.

1.° caso. — O angulo é adjacente ao lado conhecido e a altura corresponde a esse lado.

V é o angulo, M o lado e H a altura (fig. 155).

Sobre uma recta appliquemos A B = M, na extremidade A (fig. 156) formemos um angulo egual a V e de um ponto qualquer da recta A B levantemos uma perpendicular sobre a qual marquemos B C = H.

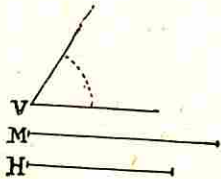
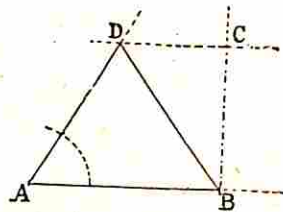



Fig. 155.

Fig. 156.

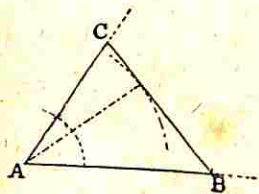
Do ponto C tracemos uma parallela a A B determinando o ponto D, terceiro vertice do triangulo pedido A B D.

2.° caso. — O angulo é adjacente ao lado conhecido e a altura corresponde ao lado opposto a esse angulo.

V é o angulo, M o lado e H a altura correspondente do lado opposto ao angulo V (fig. 155).

Façamos um angulo A = V e marquemos A B = M (fig. 157).

Fig. 157.

Do ponto A, como centro, e com um raio egual a H descrevamos um arco de circulo e do ponto B tracemos a tangente B C a esse arco. A B C é o triangulo pedido.

Problema 47. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado e dois angulos que lhe são adjacentes.

A B (fig. 158) é o lado; G e H (fig. 159) os angulos adjacentes. A partir do ponto M e sobre a recta M N (fig. 160) marquemos a distancia M D = A B. Pelo ponto M façamos um angulo egual a G e pelo ponto D, um angulo egual a H. As duas rectas M E e D F cortam-se no ponto O e M D O é o triangulo pedido.

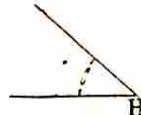
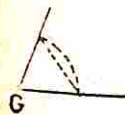
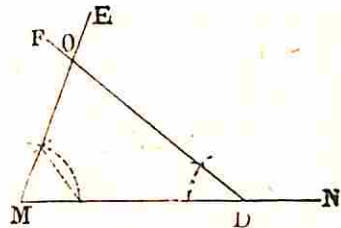



Fig. 158.

Fig. 159.

Fig. 160.

Problema 48. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e o angulo opposto a esse lado.

R S é o lado (fig. 161); N, (fig. 162) o angulo adjacente a esse lado e M (fig 163) o angulo opposto.

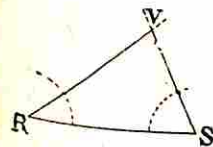
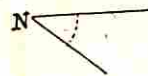
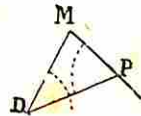



Fig. 161.

Fig. 162.

Fig. 163.

Por um ponto D tomado sobre um dos lados do angulo M formemos um outro egual a N.

Os lados dos angulos D e M determinam o ponto P. Façamos em R um angulo egual a D e em S outro egual a P. O ponto V é o encontro de R V e S V; e R S V é o triangulo pedido.

Problema 49. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e a somma dos dois outros lados.

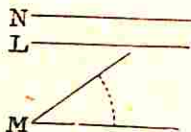



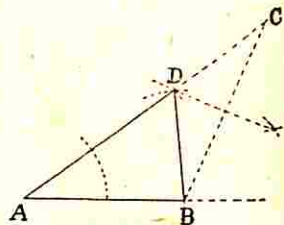
Fig. 164.

L é o lado, M o angulo e N a somma dos outros dois lados (fig. 164).

Em uma recta marquemos uma distancia A B egual ao lado L e pela extremidade A formemos um angulo egual a M (fig. 165). Appliquemos em A C a medida N e juntemos C a B.

Fig. 165.

Façamos passar pelo meio d'esta ultima recta, uma perpendicular que determinará o ponto D na recta A C.

Unamos D a B e obteremos o triangulo pedido A B D, porque D B = D C.

Problema 50. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, um angulo adjacente e a differença dos dois outros lados.

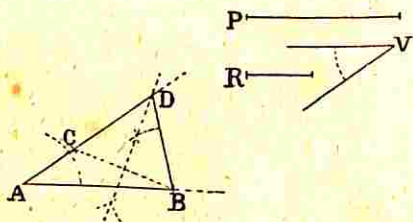



Fig. 166.

Façamos A B egual ao lado conhecido P e pela extremidade A (fig. 166) formemos um angulo egual a V.

Marquemos A C = R (differença entre os dois lados) e unamos C a B.

Pelo meio de C B tracemos uma perpendicular que determinará, com o prolongamento de A C, o ponto D, terceiro vertice do triangulo pedido ABD. CD = BD e C A = AD — CD.

Problema 51. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, o angulo opposto e a somma dos dois outros lados

M é o lado, V o angulo opposto e N a somma dos dois outros lados (fig 167) Na extremidade A de uma recta formemos um angulo egual á metade do angulo V e appliquemos em A B (fig. 168) a medida N.

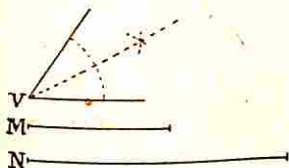



Fig. 167.

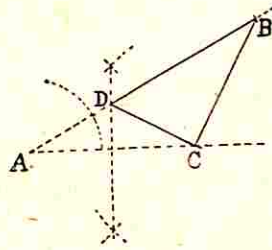



Fig. 168.

Centro em B e com um raio egual a M determinemos o ponto C, ao qual unamos o ponto B.

Pelo meio de A C façamos passar uma perpendicular que determinará na recta A B o terceiro vertice do triangulo pedido C B D porque D C=D A ; o triangulo A C D é isosceles e portanto o angulo B D C é o dobro de A.

Problema 52. — Construir um triangulo conhecendo-se um lado, o angulo opposto e a differença dos dois outros lados.

A é o lado, M o angulo e N a differença dos dois outros lados (fig. 169).

Fig. 169.

Façamos um angulo B egual a um angulo recto mais a metade de M (fig. 170).

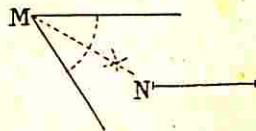
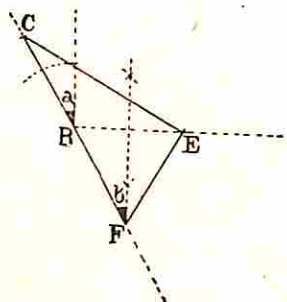
Tomemos BC=N e do ponto C, como centro, com um

raio A marquemos o ponto E, ao qual unamos C. Pelo meio de BE façamos passar uma perpendicular que determinará o ponto F no prolongamento de CB. Tracemos a recta EF que resolve o problema.

O angulo *a* é egual á metade de M e egual a *b*; *b* é 1/2 de F porque o triangulo BEF é isosceles, portanto $\wedge F = \wedge M$

Fig. 170.

Problema 53. — Construir um triangulo conhecendo-se os dois angulos da base e a altura.

R e V são os angulos da base (fig. 171) e AB é a altura (fig. 172).

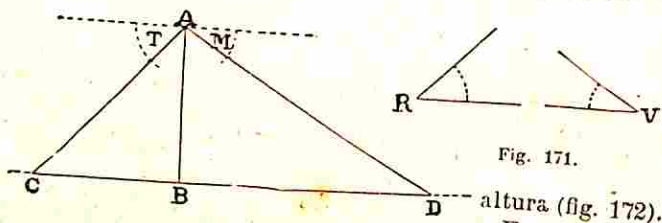



Fig. 171.

Fig. 172.

Façamos passar, pelas extremidades, rectas perpendiculares a AB.

Formemos ao redor de A e na recta perpendicular que passa por esse ponto, dois angulos sendo M = V e T = R.

Os lados d'esses angulos determinam os pontos C e D e portanto o **triangulo CDA.**

Problema 54. — Construir um triangulo conhecendo-se dois angulos e o raio do circulo circumscripto.

Com um raio AB (fig. 174) egual a R (fig. 173) descrevamos uma circumferencia de circulo e pelo ponto B tracemos uma perpendicular a AB.

Façamos no ponto B um angulo CBD = M e EBF = V.

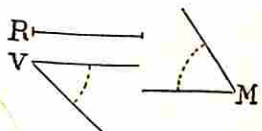



Fig. 173.

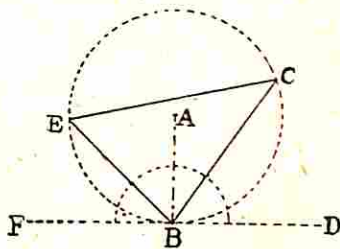



Fig. 174.

Unamos E a C e obteremos o triangulo pedido ECB.

Problema 55. — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo, o lado adjacente e a differença dos outros lados.

Tracemos a recta BC (fig. 175) egual ao lado conhecido e pela extremidade B façamos passar uma recta que forme um angulo egual ao angulo dado.

Marquemos BE egual á differença dos lados desconhecidos e tracemos EC em cuja extremidade C reproduzamos o angulo E.

Tiremos a recta CA que é o terceiro lado do triangulo pedido BCA porque AC = AE ∴ AC — AB = BE.

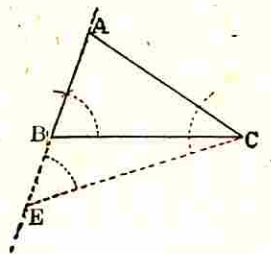



Fig. 175.

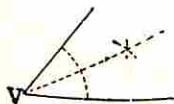
Problema 56. — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo, a altura e a mediana procedentes de vertice do mesmo angulo dado.

V é o angulo (fig. 176). Tracemos uma recta indefinida XY e por um ponto M d'essa recta levantemos uma

Fig. 176.

(*) quer dizer logo.

perpendicular na qual marquemos MC (fig. 177) egual á altura dada

De C e com um raio egual á mediana conhecida marquemos o ponto N.

Tracemos a recta CN e de cada lado d'essa recta, no ponto C, construamos um angulo egual á metade de V.

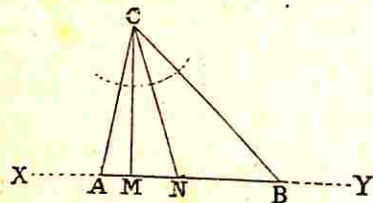



Fig. 177.

Traçadas as rectas CB e CA veremos o triangulo ABC, solução do problema.

Problema 57. — Construir um triangulo conhecendo-se um angulo e duas alturas.

As duas alturas correspondem aos lados do angulo conhecido.

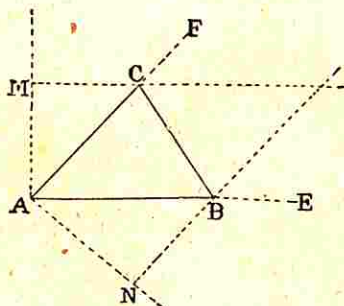
Formemos um angulo A egual ao angulo dado (fig. 178) e do vertice façamos partir duas perpendiculares: uma a cada lado do angulo.

Em uma d'estas perpendiculares marquemos AM egual a uma das alturas, e na outra, AN egual á segunda altura dada.

Por M tracemos uma parallela ao lado AE e por N outra parallela ao lado AF.

Fig. 178.

As parallelas determinam os pontos B e C e portanto o triangulo ABC. Unamos B a C.

Problema 58. — Construir um triangulo conhecendo se os pés das tres alturas.

Sejam M, N e D os pés das tres alturas (fig. 179).

Unamos estes pontos entre si e prolonguemos as rectas em ambas as direcções.

Tracemos as bissectrizes dos angulos externos d'esse triangulo e ellas darão a solução do problema: o triangulo ABC.

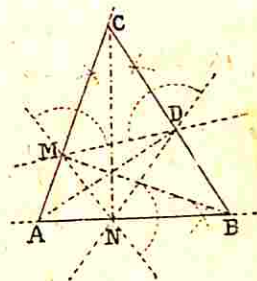
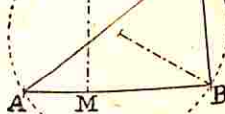



Fig. 179.

Problema 59. — Construir um triangulo conhecendo-se o raio do circulo circumscripto, um lado e uma altura.

1.° caso. — A altura corresponde ao lado dado.

Descrevamos uma circumferencia de circulo com o raio conhecido; de um ponto qualquer A (fig. 180) tomado na curva e com um raio egual ao lado dado determinemos o ponto B.

Tracemos a recta AB e tiremos-lhe uma parallela a uma distancia MN egual á altura conhecida.

Esta parallela determina o ponto C ao qual unamos A e B formando o triangulo ABC.

Fig. 180.

2.° caso. — A altura corresponde a um dos lados desconhecidos.

Descrevamos uma circumferencia com o raio dado.

De um ponto A (fig 181) e com um raio egual ao lado conhecido marquemos B.

Tracemos a recta AB e do ponto A, como centro e com um raio AM egual á altura dada, descrevamos um arco de circulo.

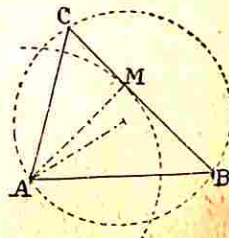



Fig. 181.

De B façamos partir uma recta que toque o arco no ponto M: esta recta determina o ponto C, terceiro vertice do triangulo pedido A B C. Unamos A e B ao ponto C.

Problema 60. — Construir um triangulo conhecendo-se as tres medianas.

Formemos um triangulo A B C (fig. 183) cujos lados sejam respectivamente eguaes a dois terços de cada mediana: $AB = \frac{2}{3}$ de M; $AC = \frac{2}{3}$ de N e $BC = \frac{2}{3}$ de P (fig. 182).

Reproduzamos o triangulo ABC em CDB, traçando as parallelas aos lados CA e AB.

Prolonguemos DC, AC e BC; tracemos a recta A D e do ponto E appliquemos EF = P.

Unamos F a A e D.

A D F é o triangulo pedido.

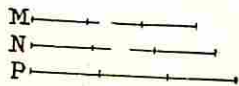



Fig. 182.

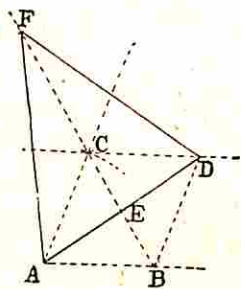



Fig. 183.

Problema 61. — Construir um triangulo, conhecendo-se a base, o perimetro e um angulo da base.

Pela extremidade A da recta A B (fig. 184) egual á base dada, formemos um angulo egual ao angulo conhecido.

Marquemos em A C o perimetro diminuido de A B.

Unamos C a B e tracemos no ponto B um angulo C B M egual ao angulo C.

A B M é o triangulo pedido.

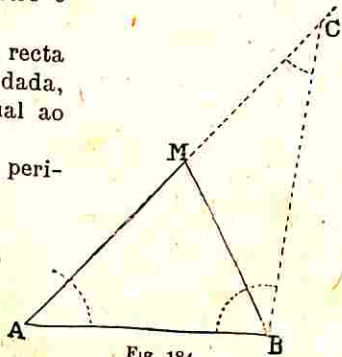



Fig. 184.

Problema 62. — Construir um triangulo conhecendo-se o perimetro e dois angulos.

Na extremidade M da recta MN (perimetro do triangulo pedido) formemos um angulo (fig. 186) egual á metade de P (fig. 185); no ponto N formemos um angulo egual á metade de R.

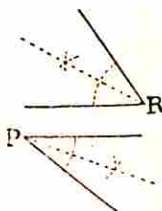



Fig. 185.

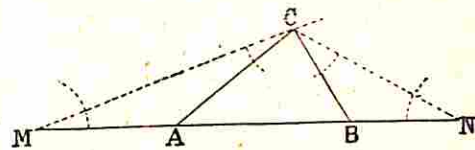



Fig. 186.

Achado o ponto C pelo encontro das rectas que formaram os angulos M e N, façamos o angulo ACM = M e BCN = N.

O triangulo A B C resolve e problema.

Problema 63. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a hypothenusa. Sobre uma recta qualquer marquemos MD (fig. 187) egual á hypothenusa conhecida; pelo ponto M façamos um angulo egual ao angulo dado, e do ponto D abaixemos a perpendicular D E sobre M G.

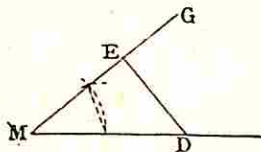



Fig. 187.

M D E é o triangulo pedido.

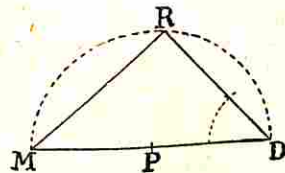
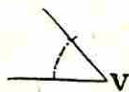
Outro processo. — Dividamos a hypothenusa M D (fig. 188) ao meio e com o centro em P descrevamos a semi-circumferencia que termine nos pontos M e D.

Neste ultimo ponto façamos um angulo egual a V (fig. 189)

Fig. 188.

Fig. 189.

prolongando o lado até determinar o ponto R, ao qual unamos M

MDR é o triangulo pedido.

Problema 64. — Construir um triangulo rectangulo, conhecendo-se a hypothenusa e um catheto.

AB (fig. 190) é a hypothenusa e CD (fig. 191) é o catheto.

Sobre MN marquemos

Fig. 190.

Fig. 191.

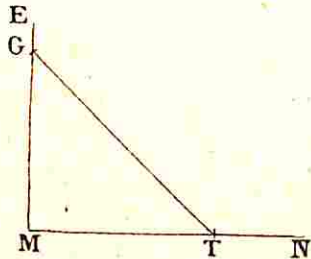



Fig. 192.

MT (fig. 192) = CD; pelo ponto M levantemos uma perpendicular ME, façamos centro em T e com um raio egual a AB, cortemos a perpendicular ME no ponto G o qual, ligado ao ponto T, resolve o problema.

Problema 65. — Construir um triangulo rectangulo, conhecendo-se um catheto e um angulo agudo adjacente a esse catheto.

Sobre uma recta appliquemos AB (fig. 193) egual ao catheto; pela extremidade A levantemos uma perpendicular a essa recta e na outra extremidade reproduzamos o angulo agudo conhecido. O lado d'esse angulo determinará, na perpendicular, o ponto D e portanto o triangulo ABD.

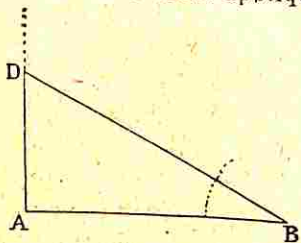



Fig. 193.

Problema 66. — Construir um triangulo rectangulo-isosceles conhecendo-se a hypothenusa.

Sobre uma recta appliquemos AB (fig. 194) egual a hypothenusa dada; façamos passar pelo meio d'esta recta uma perpendicular.

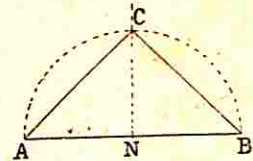
Com um raio NA (metade de AB) descrevamos a semi-circumferencia ACB.

Unamos os pontos A e B ao ponto C e obteremos o triangulo pedido.

Fig. 194.

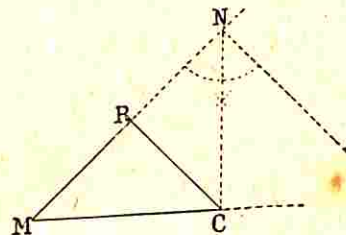
Problema 67. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a somma dos cathetos.

Sobre um dos lados do angulo dado M (fig. 195) appliquemos MN egual á somma dos dois cathetos. Formemos pelo ponto N um angulo recto e tiremos-lhe a bissectriz que determinará o ponto C no outro lado do mesmo angulo M.

Fig. 195.

Abaixemos do ponto C uma perpendicular a MN e o ponto R será o terceiro vertice do triangulo rectangulo pedido MRC.

MN = MR + RC porque RC = RN como lados symetricos do triangulo isosceles CNR.

Problema 68. — Construir um triangulo-rectangulo conhecendo-se um angulo agudo e a differença dos dois cathetos.

Sobre um dos lados do angulo conhecido V (fig. 196) appliquemos VB egual á differença dos dois cathetos.

Pelo ponto B formemos um angulo recto e tiremos-lhe a

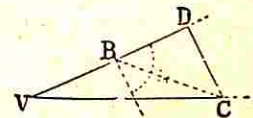



Fig. 196.

bissectriz que determinará o ponto C no outro lado do angulo V.

Abaixemos do ponto C uma perpendicular sobre o prolongamento de V B.

V D C é o triangulo rectangulo pedido, porque V B é a differença entre V D e D C ou D B.

Problema 69. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um catheto e o raio do circulo inscripto.

Pela extremidade B da recta A B, catheto conhecido, (fig. 197) levantemos uma perpendicular.

Com o lado B C, egual ao raio do circulo inscripto, construamos o quadrado C S E F.

Centro em E e raio egual a E C descrevamos uma circumferencia e do ponto A tiremos uma recta que toque a circumferencia e determine o ponto D no prolongamento da perpendicular S F.

A S D é o triangulo rectangulo pedido.

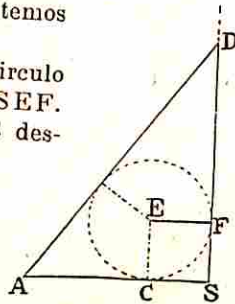



Fig. 197.

Problema 70. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se o raio do circulo inscripto e um angulo agudo.

Tracemos um angulo agudo M A N (fig. 198) egual ao angulo dado e tiremos-lhe a bissectriz.

Pelo vertice A levantemos uma perpendicular a qualquer dos lados d'esse angulo e façamos A E egual ao raio do circulo inscripto.

Fig. 198.

Por E tiremos uma parallela a A N : essa parallela determinará o ponto O, centro do circulo inscripto, e situado na bissectriz do angulo A.

Tracemos a circumferencia com o raio O R e centro O.

A circumferencia marcará o ponto F na parallela a A N.

Finalmente por esse ultimo ponto F façamos passar uma perpendicular a E F a qual determinará os pontos C e B e portanto o triangulo A B C.

Problema 71. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a altura correspondente á hypothenusa e a differença dos angulos agudos.

Seja M N a altura (fig. 199) e V a differença entre os angulos agudos (fig. 200).

Formemos um angulo M N P = V e

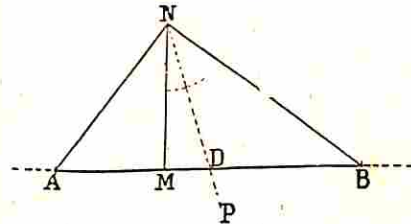



Fig. 199.

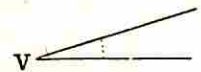



Fig. 200.

pela extremidade M tracemos uma perpendicular a M N; esta perpendicular determina o ponto D no lado N P.

Reproduzamos em D B e D A a medida D N e unamos N a A e B : obteremos o triangulo pedido A N B.

Problema 72. — Inscrever um circulo em um triangulo dado.

Tiremos as bissectrizes dos angulos A e B do triangulo conhecido A B C (fig. 201).

O ponto M, intersecção das duas bissectrizes, é o centro do circulo. Com o raio M N, perpendicular sobre A B, descrevamos a circumferencia que tocará os lados do triangulo.

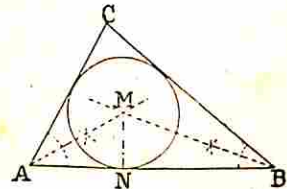



Fig. 201.

Problema 73. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a hypothenusa e a altura correspondente.

Sobre a hypothenusa conhecida A B, como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia (fig. 202) e de um ponto qualquer d'essa recta (A por exemplo) levantemos-lhe uma perpendicular sobre a qual marquemos A M egual á altura dada.

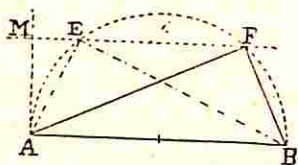



Fig. 202.

De M tracemos uma parallela a A B, a qual determinará E e F na semi-circumferencia.

Qualquer dos triangulos A E B ou A F B resolve o problema.

Nota. — Este problema só terá solução quando a altura fôr egual, ou menor do que a metade da hypothenusa.

Problema 74. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se um catheto e a altura abaixada do vertice do angulo recto.

Construamos o triangulo rectangulo A C B (fig. 203) sendo A C egual á altura dada e A B ao catheto conhecido.

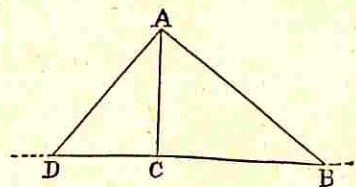



Fig. 203.

Prolonguemos B C e pelo ponto A da recta A B levantemos a perpendicular A D.

D A B é o triangulo rectangulo pedido.

Problema 75. — Construir um triangulo rectangulo conhecendo-se a mediana e a altura provenientes do angulo recto.

Tracemos o triangulo rectangulo A P R em que A P é egual á altura e A R á mediana (fig. 204).

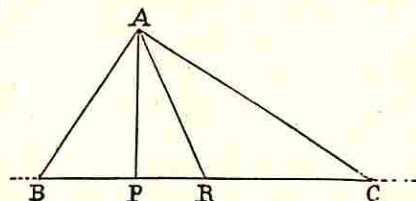
Prolonguemos P R para ambos os lados e marquemos R B e R C eguaes cada uma a R A.

Tracemos as rectas A B e A C.

Fig. 204.

B A C é o triangulo que resolve o problema.

Problema 76. — Por um ponto dado, traçar uma recta que separe dois outros pontos tambem dados e lhes seja equidistante.

M e N são os pontos conhecidos e R o ponto pelo qual deverá passar a recta equidistante de M e N (fig. 205).

Unamos estes pontos e dividamos a recta M N ao meio. De R tracemos R F D que será a recta pedida, porque os triangulos rectangulos M E F e N D F são eguaes por terem as hypothenusas eguaes e os angulos em F tambem eguaes ∴ M E = N D.

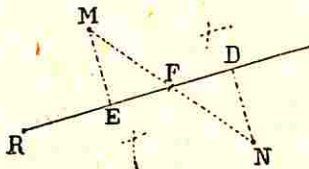



Fig. 205.

EXERCICIOS

1. — Hilda! traça um triangulo.
2. — Que nome tem a somma dos lados de um triangulo? — Exemplo.
3. — A que é egual a somma dos angulos de um triangulo? — Mostra praticamente.
4. — Mostra a altura de um triangulo.

5. — Mostra a mediana.

6. — Como se dividem os triangulos em relação á grandeza de seus lados?

7. — Traça um triangulo escaleno; — um isosceles; — um equilatero.

8. — Como se dividem os triangulos em relação á grandeza de seus angulos?

9. — Traça um triangulo acutangulo; — um obtusangulo; — um rectangulo; — um equiangulo.

10. — Mostra uma hypothenusa; — um catheto.

11. — Quaes são os tres casos de egualdade dos triangulos?

12. — Constroe um triangulo equilatero cujo lado seja egual a 30 millimetros.

13. — Idem um triangulo equilatero cujo perimetro seja egual a 120 millimetros.

14. — Idem um triangulo rectangulo cujos cathetos meçam, um 30 millimetros e o outro 37 millimetros.

15. — Idem um triangulo rectangulo em que um dos cathetos meça 25 millimetros e a hypothenusa 40 millimetros.

16. — Idem um triangulo rectangulo isosceles cuja somma dos cathetos seja egual a 50 millimetros.

17. — Idem um esquadro em cartão, medindo o catheto menor 101 millimetros e o maior 203 millimetros.

Corta em papel ou cartão um **triangulo isosceles:**

18. — base = 5 centimetros e a altura = 6 centimetros.

19. — base = 5 centimetros e lado adjacente = 7 centimetros.

20. — base = $0^m,045$ e angulo do vertice = 1/2 de um angulo recto.

21. — base = $0^m,052$ e raio do circulo inscripto = $0^m,03$.

22. — base = $0^m,034$ e raio do circulo circumscripto = $0^m,04$.

23. — altura = $0^m,048$ e angulo da base = 1/3 de um angulo recto.

24. — altura = $0^m,048$ e perimetro = $0^m,16$.

25. — altura = $0^m,05$ e angulo do vertice = 1/3 do angulo recto.

26. — um dos lados symetricos = $0^m,06$ e um dos angulos da base = 1/4 do angulo recto.

Corta em cartão ou papel um **triangulo** *cujos dados sejam:*

27. — um lado = $0^m,06$; outro = $0^m,05$ e o terceiro = $0^m,043$.

28. — um lado = $0^m,058$; um outro = $0^m,045$ e o angulo por elles formado = 3/4 do angulo recto.

29 — um lado = $0^m,062$; um outro = $0^m,05$ e o angulo opposto ao primeiro = 60°.

30. — um lado = $0^m,08$; um outro = $0^m,068$ e a mediana correspondente ao segundo = $0^m,045$.

31. — idem e a mediana correspondente ao lado desconhecido = $0^m,06$.

32. — um lado = $0^m,06$; um outro = $0^m,07$ e a altura correspondente ao primeiro = $0^m,05$.

33. — idem e a altura correspondente ao lado desconhecido = $0^m,04$.

34. — um lado = $0^m,059$; a base = $0^m,08$ e a altura = $0^m,03$.

35. — um lado = $0^m,075$; uma altura = $0^m,06$ e uma outra = $0^m,062$ sendo a primeira correspondente ao lado dado.

36. — o raio do circulo circumscripto = $0^m,05$; um lado = $0^m,06$ e uma altura = $0^m,055$, correspondendo ao lado dado.

37. — uma mediana = $0^m,09$; outra = $0^m,08$ e a terceira = $0^m,10$.

Corta em papel ou cartão um **triangulo rectangulo** *cujos dados sejam:*

38. — um angulo agudo = 1/3 do angulo recto e a hypothenusa = $0^m,072$.

39. — um catheto = $0^m,05$ e um angulo agudo adjacente = 2/3 do angulo recto.

40. — um angulo agudo = 1/3 do angulo recto e a somma dos cathetos = $0^m,12$.

41. — um angulo agudo = 1/3 do angulo recto e a differença dos dois cathetos = 0,05.

42. — um catheto = $0^m,08$ e o raio do circulo inscripto = $0^m,025$.

43. — hypothenusa $0^m,07$ = e a altura correspondente = $0^m,043$.
44. — mediana proveniente do angulo recto = $0^m,06$ e a altura proveniente do mesmo vertice = $0^m,05$.

Desenha um **triangulo equilatero** *cujos dados sejam :*

45. — a altura = $0^m,06$.
46. — o lado = $0^m,08$.
47. — o lado = hypothenusa de um triangulo rectangulo cujos cathetos sejam respectivamente eguaes a 4 cm. e 6 cm.
48. — a altura = metade do perimetro de um triangulo isosceles cuja base seja egual a 5 cm. e cada lado symetrico = 3 cm., 2.
49. — o perimetro = 12 cm., 5.
50. — a metade do perimetro = 8 cm., 8.
51. — a altura = um terço de perimetro de um triangulo rectangulo cuja hypothenusa = 6 cm. e um catheto 2 cm., 4.
52. — a quarta parte do perimetro = 2 cm., 7.

CAPITULO VI

SUMMARIO : **Quadrilateros. — Quadrado. — Losango. — Rectangulo. — Parallelogrammo. — Trapezios. — Problemas.**

QUADRILATEROS.

Uma superficie plana terminada por quatro linhas rectas chama-se **quadrilatero** ou **quadrangulo** (fig. 206). O Largo de S. Francisco de Paula é um

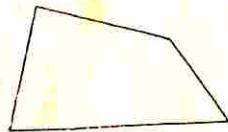



Fig. 206. — Um quadrilatero.

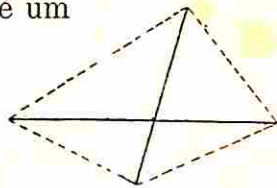



Fig. 207.

quadrilatero. Os enveloppes, os cartões de visitas, as vidraças, os cadernos, os mappas têm geralmente a fórma de **quadrilateros.**

Cada **quadrilatero** tem quatro *lados,* quatro *angulos* e quatro *vertices.*

A linha que une dois *vertices* oppostos, isto é não consecutivos, chama-se ***diagonal*** (fig. 207)

Cada **quadrilatero** tem duas *diagonaes*.

A somma dos *lados* de um **quadrilatero** chama-se *perimetro*.

A somma dos *angulos* de um **quadrilatero** vale quatro angulos rectos.

Os **quadrilateros** são :

Quadrilateros . . .
1. — *Quadrado.*
2. — *Losango.*
3. — *Rectangulo.*
4. — *Parallelogrammo.*
5. — *Trapezio.*
6. — *Quadrilatero irregular.*

Se um **quadrilatero** tem os lados eguaes, parallelos dois a dois e os angulos rectos, toma o nome de *quadrado* (fig. 208). Uma moldura póde ter a fórma de um *quadrado*; o fundo de uma caixa póde ser *quadrado*. As *diagonaes* de um *quadrado* são eguaes, perpendiculares entre si, e dividem-se mutuamente ao meio.

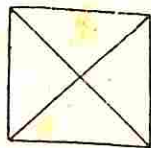



Fig. 208.
Um quadrado.

Quando traçamos as *diagonaes* de um *quadrado*, ellas o dividem em quatro triangulos rectangulo-isosceles eguaes (fig. 209).

Fig. 209.

Tracemos sobre papel ou cartão um *quadrado* e suas *diagonaes*, em seguida cortemoi-o segundo os lados e as diagonaes, e obteremos os quatro triangulos que, superpostos, nos mostrarão pratica e tachymetricamente que são eguaes.

Synopse

Quadrado . .
- *lados* . . . . *eguaes e parallelos dois a dois.*
- *angulos rectos.*
- *diagonaes* . . *eguaes, perpendiculares entre si, dividem-se ao meio.*

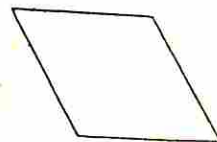
Um **quadrilatero** com os lados eguaes, parallelos dois a dois e com dois angulos agudos e dois obtusos, chama-se *losango*, (fig. 210)

Se juntarmos as bases de dous triangulos isosceles, obteremos um *losango*.

Fig. 210. — Losango.

Em um *losango* os *angulos* oppostos são eguaes, as *diagonaes* são deseguaes, perpen-

diculares entre si e dividem-se ao meio.

O *losango* com as *diagonaes*, fica dividido em quatro triangulos rectangulo-escalenos eguaes (fig. 211).

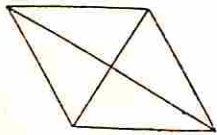



Fig. 211.

A *base* é qualquer um dos lados e a *altura* é a perpendicular abaixada de um ponto da *base* ou do seu prolongamento sobre o lado opposto.

Synopse

Losango . . .
- *lados*. . . . .
  - *eguaes e*
  - *parallelos dois a dois.*
- *angulos* . . .
  - *dois agudos eguaes.*
  - *dois obtusos eguaes.*
- *diagonaes* . .
  - *deseguaes*
  - *perpendiculares entre si, dividem-se ao meio.*

Quando um **quadrilatero** tem os *lados* oppostos eguaes e parallelos e os *angulos* rectos, chama se ***rectangulo*** ou ***quadrilongo*** (fig 212).

Fig. 212. — Rectangulo.

Uma moldura, uma

nota de quinhentos réis, um mappa, um livro, um cartão de visitas, um caderno, uma régua, têm a fórma de um ***rectangulo.***

As *diagonaes* de um ***rectangulo*** são eguaes e dividem-se ao meio; a *base* é geralmente um dos lados maiores e a *altura* é um dos lados adjacentes á *base*.

Synopse

Rectangulo . .
- *lados oppostos* .
  - *eguaes e*
  - *parallelos.*
- *angulos rectos.*
- *diagonaes* . .
  - *eguaes e*
  - *dividem-se ao meio.*

O **quadrilatero,** cujos *lados* oppostos são eguaes e parallelos e os *angulos*, dois agudos e dois obtusos, é um ***parallelogrammo*** (fig. 213).

Fig. 213. — Parallelogrammo.

As *diagonaes* d'este **quadrilatero** são deseguaes e dividem-se ao meio.

A *base* é geralmente um dos dois lados maiores e a *altura* é a perpendicular que une

a *base* ou o seu prolongamento ao lado opposto.

Synopse

Parallelogrammo.
- *lados oppostos* . *eguaes e parallelos.*
- *angulos* . . *dois agudos eguaes e dois obtusos eguaes*
- *diagonaes* . *deseguaes e dividem-se ao meio*

Se o **quadrilatero** tem sómente dois de seus lados parallelos, recebe o nome de *trapezio* (fig. 214). O *trapezio* é **rectangulo,** (fig. 215) quando tem dois angulos rectos ; é **isosceles,** ou **symetrico,** (fig. 216) quando os lados não parallelos

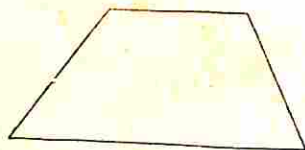



Fig. 214. — Trapezio.

Fig. 215. — Trapezio rectangulo.

Fig. 216. — Trapezio isosceles.

são eguaes, e é **escaleno** ou **irregular** (fig 217) quando os angulos e os lados são deseguaes.

Os lados parallelos são as *bases* do **trapezio** e a *altura* é a perpendicular que une as duas *bases* ou uma *base* e o prolongamento da outra.

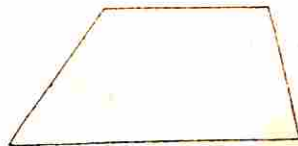



Fig. 217. — Trapezio escaleno.

A recta que une os *meios* das *bases* de um **trapezio symetrico** denomina-se *mediana* ou *eixo de symetria.*

Synopse

Trapezio .
- *rectangulo : dois angulos rectos.*
- *isosceles ou symetrico* *lados não parallelos, eguaes.*
- *escaleno ou irregular.* *lados e angulos deseguaes.*

Á recta que une os *meios* dos *lados oppostos* de um **quadrado,** de um **losango,** de um **parallelogrammo rectangulo,** de um **parallelogrammo** dá-se o nome de *diametro* ou *mediana.*

O *diametro* divide a figura em partes eguaes.

Em cada um d'esses **quadrilateros** ha duas *medianas*, e a intersecção d'essas *medianas* é o *centro* da figura.

Quando dois ou mais quadrilateros têm *perimetros* eguaes chamam-se *isoperimetros.*

Problema 77. — Construir um quadrado, conhecendo-se um lado.

1.ª Solução. — Sobre uma recta appliquemos o lado AM (conhecido) e de cada um dos pontos A e M (fig. 218) levantemos, com o auxilio de um esquadro, uma perpendicular.

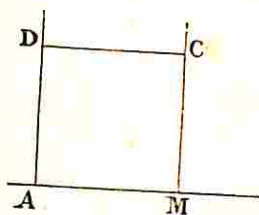



Fig. 218.

Façamos as distancias A D e M C eguaes cada uma a A M; unamos o ponto D ao ponto C e teremos construido o **quadrado.**

2.ª Solução — Façamos um angulo recto (fig 219).

A partir do vertice M e com um raio egual á medida do lado conhecido, determinemos os pontos E e F; centro nesses pontos e com o mesmo raio, determinemos C, o qual, unido aos pontos E e F, resolve o problema.

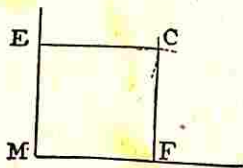



Fig. 219.

3.ª Solução. — Das extremidades A e B do lado dado (fig. 220) e com um raio egual a A B descrevamos os arcos que partem d'esses pontos.

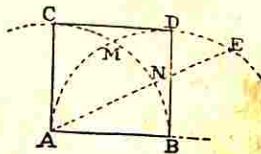



Fig. 220.

Da intersecção M dos dois arcos, e com o mesmo raio, determinemos o ponto E.

Tracemos a recta A E e do ponto

M, com um raio egual a M N, marquemos C e D, Unamos entre si A e C; C e D; D e B.

A B C D é o quadrado pedido.

Problema 78. — Construir um quadrado conhecendo-se um lado e o ponto central d'esse quadrilatero.

Seja M o ponto central (fig. 221). Tracemos uma recta que passe por esse ponto e perpendicular a essa recta, tiremos outra que tambem passe pelo mesmo ponto M.

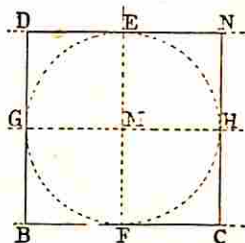
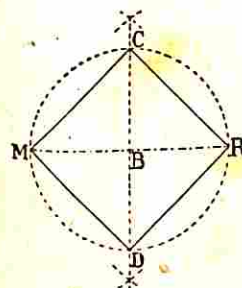



Fig. 221.

Tomemos a metade do lado dado e, fazendo centro em M, descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará E, F, G, H nas perpendiculares.

Por E e F tracemos rectas parallelas a G H e por estes pontos G e H, tracemos parallelas a E F; obteremos assim o quadrado B C D N.

Problema 79. — Construir um quadrado conhecendo-se uma diagonal.

1.ª Solução. — Seja M R a diagonal (fig. 222).

Façamos passar pelo meio d'essa recta uma perpendicular e com o centro em B (meio de M R) e raio BM ou BR descrevamos uma circumferencia de circulo que determinará na perpendicular os pontos C e D.

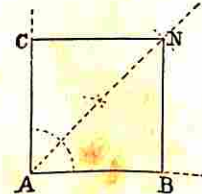



Fig. 222.

Fig. 223.

Unamol-os a M e R e estará traçado o quadrado M D C R.

2.ª Solução. — Tracemos um angulo recto e a sua bissectriz; appliquemos em A N (fig. 223) a medida da diagonal dada,

Do ponto N tracemos N C parallela a um lado do angulo e N B parallela ao outro lado.

A B C N é o quadrado pedido.

Problema 80. — Construir um quadrado conhecendo-se sómente a differença entre o lado e a diagonal.

Seja R (fig. 224) a differença entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Construamos um quadrado qualquer M N O P; tracemos a diagonal M P prolongando-a em ambas as direcções (fig. 225).

R

Fig. 224.

C D O P Q N M A B

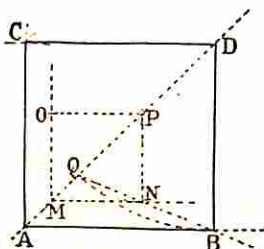



Fig. 225.

Façamos centro em P e com o raio egual a P N descrevamos o arco N Q. A distancia Q M será a differença entre o lado e a diagonal do quadrado M N O P.

Appliquemos de Q até A a differença dada R e do ponto A façamos partir uma parallela ao lado M N; prolonguemos a recta que passa por Q N até determinar n'essa parallela o ponto B.

A B será o lado do quadrado pedido.

Construamos portanto sobre A B o quadrado A B C D.

Problema 81. — Construir um rectangulo, conhecendo-se dois lados adjacentes.

E G V F

Fig. 226.

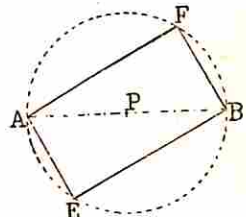
Façamos um angulo recto. A partir do vertice, com um raio egual a um dos lados determinemos o ponto E (fig. 226), e com a distancia egual ao outro lado, marquemos o ponto F; façamos partir do ponto F

uma parallela a V E e, do ponto E, outra a V F: estas duas rectas encontram-se no ponto G. O quadrilatero V F E G é o **rectangulo** pedido

Problema 82. — Construir um rectangulo conhecendo-se um lado e uma diagonal.

F A P B E

Fig. 227.

Façamos centro em P (meio da diagonal dada A B) e com um raio egual a P B ou P A descrevamos uma circumferencia de circulo (fig. 227).

De A e B, como centros, e com um raio egual ao lado dado, marquemos os pontos E e F, aos quaes unamos A e B obtendo o rectangulo pedido AEFB.

Problema 83. — Construir um rectangulo conhecendo-se um lado e o angulo formado por esse lado e a diagonal.

C D A B

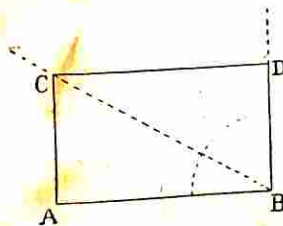



Fig. 228.

A B é o lado dado (fig. 228).

Formemos na extremidade B um angulo egual ao angulo conhecido e por A e B levantemos perpendiculares a AB.

A perpendicular do ponto A encontra no ponto C a recta que fórma o angulo B.

De C façamos partir uma parallela a A B, a qual determinará o ponto D.

A B C D é o rectangulo

Problema 84. — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e o angulo formado por essa diagonal e u[m] dos lados.

Seja A B a diagonal (fig. 229).

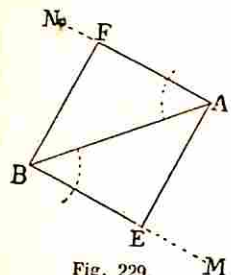
Formemos nas extremidades A e B os angulos A B M e B A N eguaes, cada um ao angulo dado.

Levantemos pela extremidade A da recta A N a perpendicular A E e pela extremidade B da recta B M, a perpendicular B F; resulta o rectangulo B E F A.

Fig. 229.

Problema 85. — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e um dos angulos formados pelas duas diagonaes.

Seja A o angulo dado (fig. 230).

Prolonguemos seus lados de modo a formar o angulo verticalmente opposto.

Façamos centro no vertice do angulo e com um raio egual á metade da diagonal conhecida, determinemos os pontos B C E D.

Unamos entre si B e C; C e E; E e D; D e B.

C E B D é o rectangulo.

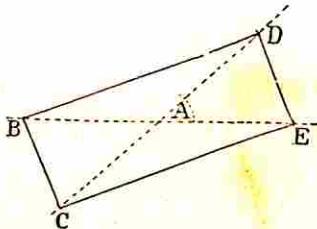



Fig. 230.

Problema 86. — Construir um rectangulo conhecendo-se um lado e um dos angulos formados pelas duas diagonaes entre si.

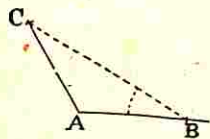
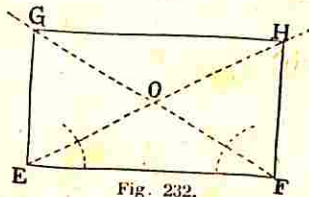



Fig. 231.

Fig. 232.

Marquemos sobre os lados do angulo dado A B = A C, e unamos C a B (fig. 231).

Sobre uma recta reproduzamos em E F (fig. 232) a medida do lado conhecido e em cada uma das extremidades E e F formemos um angulo egual a B ou C.

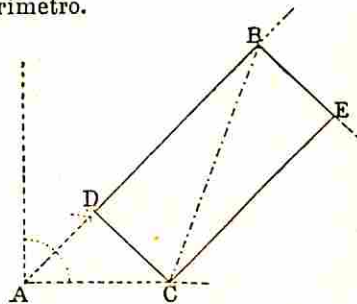
Dois lados d'estes angulos assignalam o ponto O que é o centro do rectangulo e do qual, com um raio O E ou O F, determinemos G e H.

Tracemos as rectas E G, G H, H F e teremos o rectangulo pedido.

Problema 87. — Construir um rectangulo conhecendo-se uma diagonal e o perimetro.

Seja a diagonal egual a $0^m,038$ e o perimetro $= 0^m,10$.

Façamos o angulo A egual á metade do angulo recto e appliquemos de A até B a medida da metade do perimetro.

De B, como centro, e com um raio egual á diagonal, descrevamos um arco que córte o outro lado do angulo no ponto C, do qual abaixemos a perpendicular C D sobre A B.

Unamos B a C; pelo ponto B tiremos uma parallela a D C e por C uma outra a D B. C E D B resolve o problema.

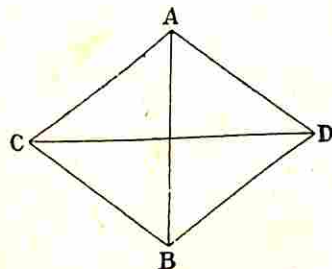



Fig. 233.

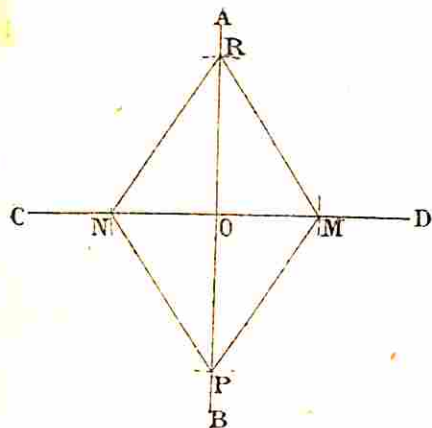
Problema 88. — Construir um losango conhecendo-se as duas diagonaes.

Fig. 234.

Sejam A B e C D (fig. 234) as diagonaes. Tracemos estas

diagonaes perpendicularmente entre si e reciprocamente uma pelo meio da outra, unamos os pontos A e D; A e C; B e C; B e D e teremos resolvido o problema.

Fig. 235.

Problema 89. — Construir um losango qualquer.

Tracemos as rectas A B e C D perpendicularmente entre si (fig. 235); tomemos, a partir do ponto O, O M = O N; O P = O R; tracemos as rectas R M, M P, P N e N R e o **quadrilatero** R M P N é o losango pedido.

Problema 90. — Construir um losango conhecendo-se um lado e uma das diagonaes.

Seja um lado egual a $0^m,022$ e a diagonal egual a $0^m,035$.

Tracemos M N = $0^m,035$ e das extremidades M e N, com um raio egual a $0^m,022$ determinemos os pontos O e P (fig. 236).

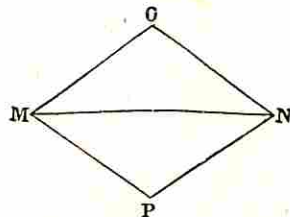



Fig. 236.

Unamos O a M e N, e P aos mesmos pontos.

M P O N é o losango pedido.

Problema 91. — Construir um losango conhecendo-se um lado e um angulo.

Seja P R o lado (fig. 238), e M o angulo (fig. 237).

Formemos em P um angulo egual a M e reproduzamos em P S o lado P R.

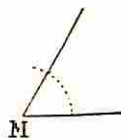



Fig. 237.

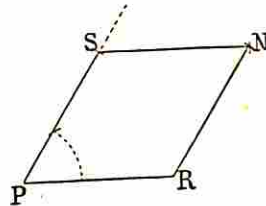



Fig. 238.

Com o centro em S e depois em R e com um mesmo raio P R determinemos o ponto N. O losango é P R S N.

Problema 92. — Construir um losango conhecendo-se um angulo e uma diagonal.

Tiremos a bissectriz do angulo conhecido A (fig. 239) e

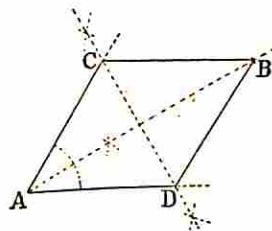



Fig. 239.

marquemos de A até B a medida da diagonal dada

Façamos passar pelo meio d'essa diagonal uma perpendicular que determinará os pontos C e D nos lados do angulo A.

Unamos B a C e D. O losango pedido é A D C B.

Problema 93. — Construir um parallelogrammo, conhecendo-se dois lados adjacentes e uma diagonal.

1.ª *Solução.* — Sejam A B e C D (fig. 240) os lados adjacentes e E F (fig. 241) a diagonal. Tracemos a linha M N

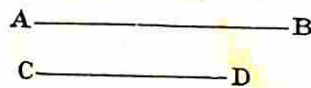



Fig. 240.

Fig. 241.

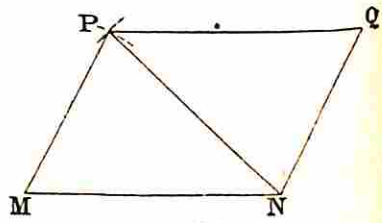
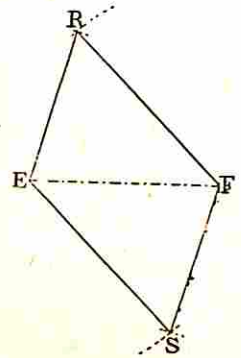



Fig. 242.

egual a A B; do ponto M (fig. 242) com um raio egual a C D e ponto N com um raio egual a EF, determinemos o ponto P, unamol-o aos pontos M e N. Do ponto P tiremos uma parallela a MN e do ponto N, outra a MP.

O quadrilatero MNPQ é o parallelogrammo pedido.

2.ª *Solução.* — EF é a diagonal (fig. 243).

Façamos centro em E e depois em F, e com um mesmo raio egual a A B (fig. 240) descrevamos dois arcos, um de um lado e outro do outro lado da recta E F.

Fig. 243.

Com um raio egual a CD (fig. 240) e centro nos mesmos pontos E e F cortemos os arcos já traçados nos pontos R e S, aos quaes unamos as extremidades E e F.

R E F S é o parallelogrammo pedido.

Problema 94. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se dois lados adjacentes e a altura.

Fig. 244.

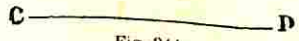
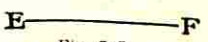



Fig. 245.

Sejam A B e C D (fig. 244) os lados adjacentes e EF

(fig. 245) a altura. Tracemos a linha MN igual a CD e do ponto N (fig. 246) levantemos uma perpendicular N Q egual á recta E F. Pelo ponto Q tracemos uma linha indefinida J K parallela a MN. Façamos centro em N e com

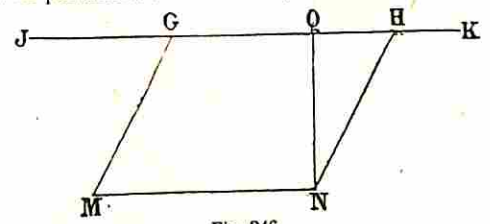



Fig. 246.

um raio egual a A B cortemos no ponto H a recta J K; unamos H a N e pelo ponto M tracemos uma parallela a N H. M N G H é o parallelogrammo pedido.

Problema 95. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se dois lados adjacentes, um angulo agudo e um angulo obtuso.

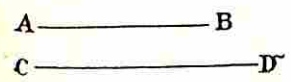



Fig. 247.

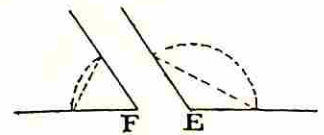



Fig. 248.

Sejam A B e C D (fig. 247) os lados adjacentes; E e F (fig. 248) os angulos. Façamos M N = C D e nos pon-

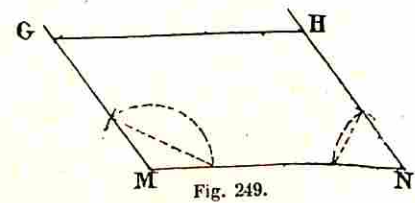



Fig. 249.

tos M e N (fig. 249) construamos dois angulos respectivamente eguaes a E e F; do ponto M, como centro, e com um

raio egual a A B determinemos o ponto G do qual façamos partir a recta G H parallela a M N e assim resolvemos o problema.

Nota. — A somma d'esses dois angulos deve ser sempre egual a dois angulos rectos.

Problema 96. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se dois lados adjacentes e o angulo por elles formado.

Sejam A B e C D (fig. 250) os lados adjacentes e E

Fig. 250.

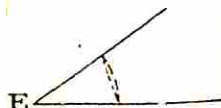



Fig. 251.

(fig. 251) o angulo. Sobre uma recta indefinida marquemos a distancia M N egual a C D, no ponto M (fig. 252) façamos

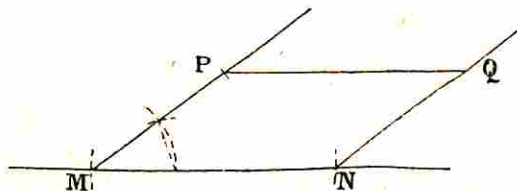



Fig. 252.

um angulo egual a E e com um raio egual a AB marquemos o ponto P, a partir de M. Do ponto N tracemos uma parallela a M P e do ponto P outra a M N. M N P Q é o parallelogrammo pedido.

Problema 97. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se as diagonaes e um lado.

Uma das diagonaes mede $0^{m},03$ e a outra $0^{m},04$; o lado $0^{m},02$.

Sobre uma recta marquemos a medida do lado (fig. 253).

Construamos o triangulo ABC tendo para base esse lado e para os outros lados as metades das diagonaes dadas.

Prolonguemos A C e B C e reproduzamos em CD a medida CB, e em C E a medida C A.

Tracemos os lados A D, D E e E B e teremos o parallelogrammo A B D E.

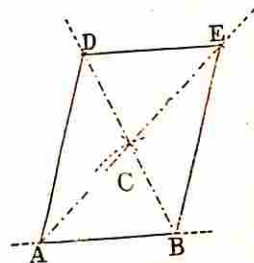
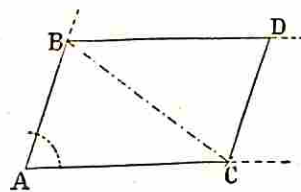



Fig. 253.

Problema 98. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se um lado, um angulo, e uma diagonal.

Seja A, o angulo (fig. 254): o lado mede $0^{m},02$ e a diagonal $0^{m},03$.

Marquemos $AB = 0^{m},02$ e do ponto B, como centro, e com um raio egual a $0^{m},03$ determinemos o ponto C, no outro lado do angulo A.

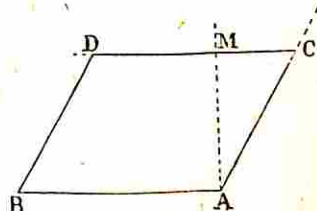
Fig. 254.

De B tiremos uma parallela A C, e de C outra a A B. A solução do problema é A C B D.

Problema 99. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se um lado, uma altura e um angulo. Seja de $0^{m},03$ a medida do lado; de $0^{m},02$ a da altura e A o angulo (fig. 255).

Marquemos $A B = 0^{m},03$ e do vertice levantemos uma perpendicular a B A. Façamos $A M = 0^{m},02$.

Fig. 255.

Pelo ponto M tiremos uma parallela a B A e por B uma outra a A C. O quadrilatero B A D C resolve o problema.

Problema 100. — Construir um parallelogrammo conhecendo-se um angulo, o perimetro e uma diagonal.

Seja de $0^m,043$ a medida da diagonal; o perimetro egual a $0^m,10$ e N o angulo (fig. 256).

Façamos em A (fig. 257) um angulo egual a $\frac{1}{2}$ de N; appliquemos em A B a metade do perimetro. Centro em B, e com um raio egual á diagonal determinemos o ponto C.

Tracemos a diagonal B C, e façamos passar pelo meio de CA uma perpendicular que determine o ponto E na recta A B.

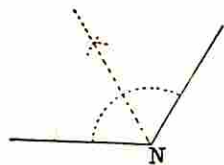
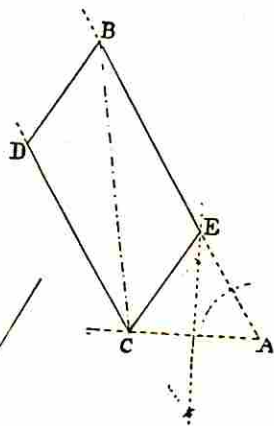



Fig. 256.

Fig. 257.

Unamos E a C e por este ultimo ponto tracemos uma parallela a E B.

De B tracemos uma parallela a E C e acharemos o ponto D, quarto vertice do parallelogrammo D C B E.

Problema 101. — Construir um trapezio symetrico.

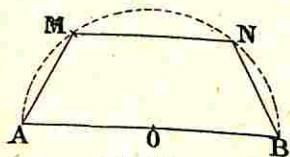
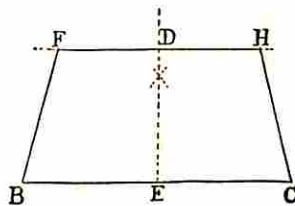
Tracemos uma recta A B (fig. 258), dividamol-a ao meio e com a distancia O A descrevamos uma semi-circumferencia tendo como centro o ponto O (meio da recta A B).

Do ponto A e com uma distancia qualquer determinemos o ponto M do qual façamos partir uma recta M N parallela a A B.

Fig. 258.

Unamos os pontos M e A; N e B. O quadrilatero A B M N é o trapezio symetrico pedido.

Problema 102. — Construir um trapezio isosceles conhecendo-se as duas bases e a altura.

A base maior = $0^m,04$; a menor = $0^m,03$ e a altura = $0^m,02$.

Marquemos sobre uma recta : B C = $0^m,04$ e pelo meio de B C (fig. 259) levantemos-lhe uma perpendicular.

Appliquemos, a partir de E, E D = $0^m,02$.

Fig. 259.

Façamos passar por D uma parallela a B C e com um raio egual a $\frac{1}{2}$ de $0^m,03$ ($0,^m015$) determinemos do ponto D, os pontos F e H.

Unamos F a B e H a C.

B C F H é o trapezio pedido.

Problema 103. — Construir um trapezio conhecendo-se as duas bases e os dois lados não parallelos. Seja a base maior = $0^m,035$; a base menor = $0^m,022$; um dos lados = $0^m,023$ e o outro = $0^m,03$.

Marquemos em uma recta A D = $0^m,035$ e A C = $0^m,022$.

Façamos centro em C (fig. 260) e com um raio egual a $0^m,03$ descrevamos um arco que será cortado no ponto E por um outro arco, traçado com um raio egual a $0^m,023$ e do ponto D, como centro.

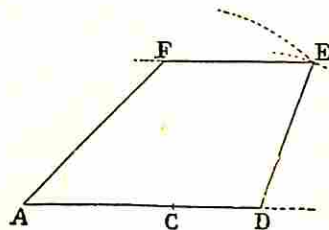



Fig. 260.

De E tiremos uma parallela a A D e sobre essa parallela appliquemos E F = $0^m,022$.

Unamos o ponto F ao ponto A, e E ao ponto D : resolveremos assim o problema.

Problema 104. — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se as bases e um angulo.

Seja uma das bases $= 0^m,05$; a outra $= 0^m,03$, e M o angulo (fig. 261).

Sobre uma recta marquemos $A B = 0^m,05$ e $A N = 0^m,03$.

Fig. 261.

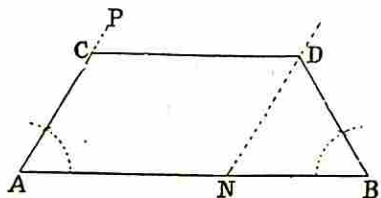



Fig. 262.

Formemos em A e em B (fig. 262) angulos eguaes a M. De N tracemos uma parallela a AP até determinar o ponto D, do qual tracemos uma outra parallela a A B.

A B C D é o trapezio-isosceles pedido.

Problema 105. — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se uma base, a altura, e um dos lados eguaes.

Seja a base $= 0^m,05$; a altura $= 0^m,015$ e um dos lados $= 0^m,02$.

Sobre uma recta marquemos $A B = 0^m,05$ e de um ponto

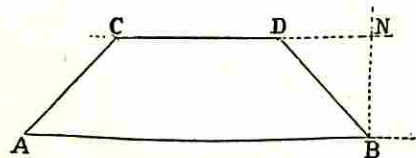



Fig. 263.

qualquer B, d'essa recta (fig. 263) levantemos-lhe uma perpendicular e façamos $B N = 0^m,015$.

Pelo ponto N tracemos uma parallela a A B.

Centro em A e depois em B e sempre com um raio egual $0^m,02$ determinemos os pontos C e D.

A B C D é a solução do problema.

Problema 106. — Construir um trapezio-isosceles conhecendo-se as bases e uma diagonal.

Seja uma das bases $= 0^m,03$; a outra $= 0^m,02$ e a diagonal $= 0^m,028$.

Marquemos em uma recta, $A B = 0^m,03$ e $A R = 0^m,02$ (fig. 264).

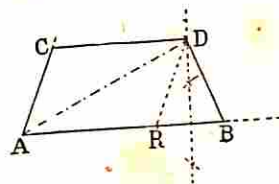



Fig. 264.

Pelo meio de R B façamos passar uma perpendicular e de A, como centro, e raio$=0^m,028$, determinemos o ponto D.

Unamos D a B e a R.

Pelo ponto A tiremos uma parallela a R D, e por D outra a A B.

A B C D resolve o problema.

Problema 107. — Construir um trapezio conhecendo-se as bases e as diagonaes.

Seja uma das bases $=0^m,04$; a outra $=0^m,025$; uma diagonal $=0^m,04$ e a outra $= 0^m,035$.

Construamos o triangulo A C D (fig. 265), em que a base

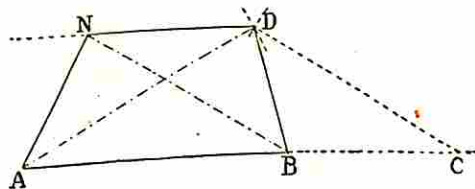



Fig. 265.

A C é egual á somma das bases do trapezio ($0^m,04 + 0^m,025 = 0^m,065$) e $A D = 0^m,04$ (uma das diagonaes); $C D = 0^m,035$ (outra diagonal).

Do ponto D tracemos uma parallela a A C, e de B a recta B N parallela a C D.

Unamos entre si N e A; D e B.

A B N D é o trapezio pedido.

EXERCICIOS

1. — Julinha! mostra um quadrilatero.

2. — Traça sobre papel ou cartão um quadrilatero e em seguida recorta-o com a tesoura.

3. — Quantos lados, — angulos, — vertices tem um quadrilatero?

4. — Quantas diagonaes?

5. — Que entendes por perimetro de um quadrilatero?

6. — Quaes os quadrilateros que conheces?

7. — Traça sobre papel um quadrado, um losango, um rectangulo, um parallelogrammo, um trapezio. Recorta cada um d'elles com uma tesoura.

8. — Mostra as diagonaes de cada um.

9. — Dize que sabes a respeito das diagonaes dos quadrilateros.

10. — Que nome tem a recta que une os meios das bases de um trapezio symetrico?

11. — Traça uma mediana de um quadrado; — de um losango; — de um rectangulo; — de um parallegrammo.

12. — Quantas medianas ha em cada um d'esses quadrilateros?

13. — Que são quadrilateros isoperimetros?

14. — A somma dos angulos de um quadrilatero é egual a quantos angulos rectos?

15. — Exemplo.

16. — Mostra praticamente que um quadrado com as diagonaes fica dividido em quatro triangulos rectangulo-isosceles iguaes.

Traça um **quadrado** *cujos dados sejam:*

17. — um lado $= 0^m,020$.

18. — a somma das diagonaes, egual a uma decima parte do metro.

19. — uma diagonal $= 0^m,03$.

20. — a differença entre o lado e a diagonal $= 0^m,015$.

21. — um lado $= 0^m,05$ e esteja em posição vertical.

22. — idem, em posição horisontal.

23. — uma diagonal $= 0^m,042$ e esteja em posição inclinada.

24. — idem, em posição vertical

25. — idem, em posição horisontal.

Traça um **rectangulo** *cujos dados sejam:*

26. — dois lados adjacentes; um, o dobro do outro e a diagonal egual ao maior.

27. — base $= 0^m,040$ e a altura, metade da base.

28. — base $=$ 5 vezes a altura e esta $=$ diagonal de um quadrado de $0^m,02$ de lado.

29. — um lado $= 0^m,06$ e uma diagonal $= 0^m,08$

30. — um lado $= 0^m,05$ e o angulo formado por elle e a diagonal $= 3/4$ do angulo recto.

31. — uma diagonal $= 0^m,09$ e o angulo formado por ella e um dos lados $= 60°$.

32. — uma diagonal $=$ 0,072 e um dos angulos formados pelas duas diagonaes $= 1/3$ do angulo recto.

33. — um lado $= 0^m,054$ e um dos angulos formados pelas diagonaes $= 2/3$ do angulo recto.

34. — uma diagonal $= 0^m,07$ e o perimetro $= 0^m,20$.

35. — as medianas eguaes, uma a $0^m,06$ e outra a $0^m,04$.

Traça um **losango** *com os seguintes dados:*

36. — uma diagonal $= 0^m,040$ e um lado $= 0^m,030$.

37. — uma diagonal $= 0^m,050$ e a outra $= 0^m,08$.

38. — um lado $= 0^m,06$ e um angulo $= 135°$.

39. — um angulo $= 2/3$ do angulo recto e uma diagonal $= 0^m,075$.

Traça um **parallelogrammo** *com os dados seguintes:*

40. — a base $= 0^m,04$, um lado adjacente $= 0^m,025$ e o angulo formado por este lado e pela base $= 1/3$ do angulo recto.

41. — um lado $= 0^m,10$; o lado adjacente $= 0^m,06$ e a altura $= 0^m,035$.

42. — um lado $= 0^m,064$; o lado adjacente $= 0^m,08$; a diagonal $= 0^m,09$.

43. — uma diagonal $= 0^m,09$; a outra $= 0^m,075$; um lado $= 0^m,04$.

44. — um lado $= 0^m,05$; um angulo $= 1/2$ do angulo recto e uma diagonal $= 0^m,068$.

45. — um lado $= 0^m,084$; a altura, metade do lado dado e um angulo $= 3/4$ do angulo recto.

46. — um angulo = 2/4 do angulo recto; o perimetro = $0^m,108$; uma diagonal = $0^m,03$.

Traça um **trapezio** *isosceles com os dados seguintes :*

47. — cada lado symetrico = $0^m,02$.
48. — base maior = $0^m,074$; base menor = $0^m,052$; altura = $0^m,032$.
49. — base maior = $0^m,065$; base menor = $0^m,04$; um angulo = 2/3 de dois angulos rectos.
50. — base maior = $0^m,08$; a altura = $0^m,05$; um dos lados symetricos = $0^m,06$.
51. — base maior = $0^m,09$; base menor = $0^m,06$ uma diagonal = 0^m08.
52. — Qual o lado de um quadrado cujo perimetro é egual a 120 centimetros ?
53. — Qual o lado de um losango cujo perimetro é egual ao de um triangulo equilatero de 12 centimetros de lado ?
54. — Qual o perimetro de um quadrado de 60 metros de lado ?
55. — Qual o perimetro de um losango de 32 kilometros de lado ?
56. — Uma sala rectangular mede 8 metros de comprimento e 5 metros de largura; qual o perimetro d'esta sala ?
57. — Qual o perimetro de um rectangulo cuja base mede 4 centimetros e um lado adjacente á base, 3 centimetros ?
58. — Traça um quadrado de 3 centimetros de lado e sobre cada um dos lados, um triangulo equilatero.
59. — Traça um triangulo equilatero de 2 centimetros de lado e sobre cada um dos lados, um quadrado.
60. — Traça um quadrado e sobre cada um dos lados um triangulo isosceles cuja base seja = $0^m,02$ e a altura=diagonal do quadrado.
61. — Traça um losango e sobre cada um dos lados um quadrado.
62. — Traça um losango cuja metade seja egual a um triangulo equilatero de 40 millimetros de lado.

Observação. — Os angulos dados **neste** capitulo devem ser traçados sem o transferidor cuja noção deve ser dada mais tarde.

CAPITULO VII

SUMMARIO : **Circumferencia. — Circulo. — Raio. — Diametro. — Arco. — Corda. — Flecha. — Secante. — Tangente. — Segmento. — Sector. — Angulo central. — Angulo inscripto. — Angulo circumscripto. — Circumferencias concentricas e excentricas. — Corôa circular. — Lunula. — Circumferencias tangentes. — Traçado da circumferencia. — Problemas.**

CIRCUMFERENCIA. CIRCULO.

Uma linha curva fechada, situada em um mesmo plano e equidistante de um ponto interior, chama-se **circumferencia** (fig. 266).

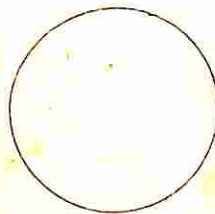



Fig. 266. — Uma circumferencia.

A esse ponto interior dá-se o nome de *centro* da **circumferencia** e á porção do plano ou superficie plana limitada pela **cir-**

cumferencia, o nome de **circulo** (fig. 267).

Fig. 267. Circulo.

Fig. 268. Moeda de nickel: um circulo.

Um annel, um aro de pipa nos dão idéa de uma **circumferencia.**

Uma moeda de nickel (fig. 268), uma roda de um carro (fig. 269), um queijo de Minas o mostrador de um relogio, as lentes de um binoculo, um pandeiro (fig. 270), têm a fórma circular, isto é, de um **circulo.**

Fig. 269. — Roda de um carro: um circulo.

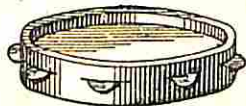



Fig. 270. — Pandeiro: um circulo.

A recta que liga o *centro* a qualquer ponto da **circumferencia,** chama-se *raio* (fig. 271) e toda a recta que liga dois pontos da **circumferencia** e passa

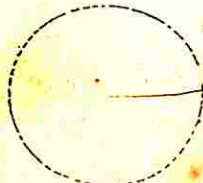



Fig. 271. — Um raio.

pelo *centro* chama-se *diametro* e é a maior

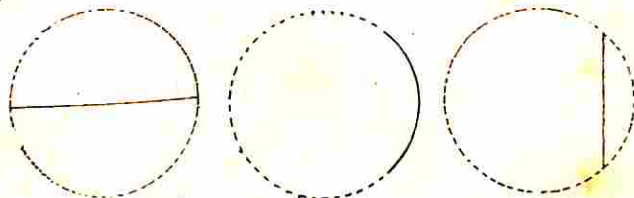



Fig. 272. — Um diametro. Fig. 273. — Um arco. Fig. 274. — Uma corda.

corda que se póde traçar em uma **circumferencia** (fig. 272)

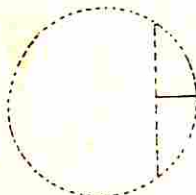
Em uma **circumferencia** todos os *raios* e *diametros* são eguaes.

Uma porção qualquer da **circumferencia** chama-se *arco* (fig. 273) e a linha recta que liga as extremidades de um *arco* chama-se *corda* (fig. 274). Á perpendicular que parte do meio da *corda* e termina no *arco* dá-se o nome de *flecha* (fig. 275).

Fig. 275. — Uma flecha.

A recta que corta a **circumferencia** em dois pontos recebe o nome de *secante* (fig. 276).

Á recta que, situada fóra do **circulo,** tem um unico

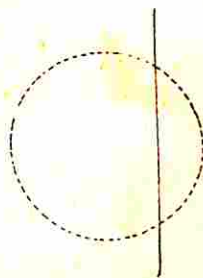



Fig. 276. — Uma secante.

ponto de commum com a **circumferencia** dá-se o nome de *tangente* (fig 277).

Esse ponto commum chama-se *ponto de contacto.*

Fig. 277. — Uma tangente.

Toda a *tangente* é perpendicular ao *raio* que termina no *ponto de contacto.*

A porção do **circulo** limitada pelo *arco* e pela *corda* chama-se *segmento* (fig. 278) e a porção comprehendida entre um *arco* e dois *raios* que terminam nas suas extremidades chama-se *sector* (fig. 279). O angulo cujo vertice está situado no *centro* da **circumferencia** e cujos lados são *raios*, é *central* (fig. 288) e o que tem o vertice na **circumferencia** e os lados são *cordas*, é *inscripto* (fig. 281).

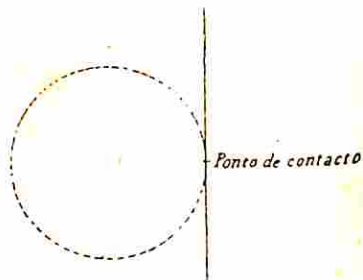
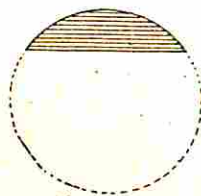



Fig. 278. — Um segmento.

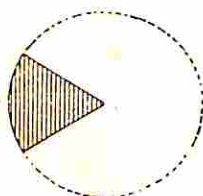



Fig. 279. — Um sector.

Fig. 280 — Angulo central.

O angulo *circumscripto* (fig. 282) tem o vertice fóra do circulo e os lados são tangentes á **circumferencia.**

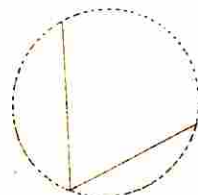



Fig. 281. Angulo inscripto.

As **circumferencias** que têm um mesmo centro, chamam-se *concentricas* (fig. 283) e as que não têm um mesmo centro são *excentricas* (fig. 284).

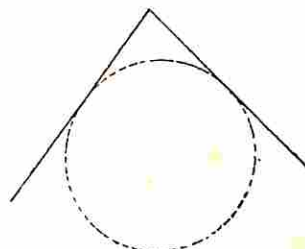



Fig. 282. Angulo circumscripto.

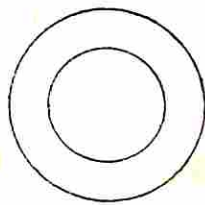



Fig. 283. Circumferencias concentricas.

A porção de um plano comprehendida por duas circumferencias *concentricas* é uma *corôa circular* (fig. 285).

Quando duas ou mais **cir-**

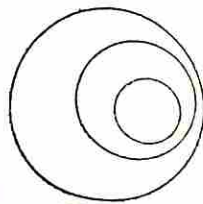



Fig. 284. — Circumferencias excentricas.

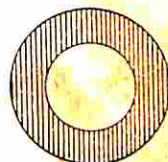



Fig. 285.

cumferencias têm, entre si, um unico ponto de contacto, são *tangentes* (fig. 286).

A porção do plano comprehendida por dois

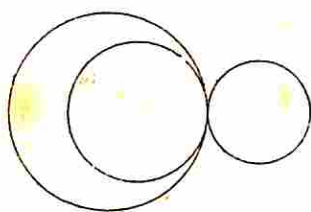



Fig. 286. — Circumferencias tangentes.

Fig. 287. — Crescente

arcos de **circumferencias** secantes, tendo a convexidade voltada para um mesmo lado, é um *crescente* ou uma *lunula* (fig. 287).

TRAÇADO DA CIRCUMFERENCIA

Geralmente sobre o papel, cartão ou madeira traçamos uma **circumferencia** com o auxilio de um instrumento chamado *compasso* (fig. 288).

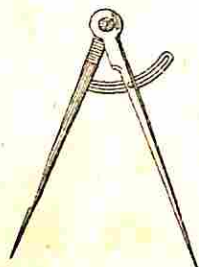



Fig. 288. — Um compasso.

A distancia em linha recta entre as duas pontas do compasso é o *raio*, uma das pontas determina o *centro* e a outra movendo-se ao redor do centro descreve

a curva que conhecemos pelo nome de **circumferencia** (fig. 289).

Adaptado á ponta movel empregamos geralmente o giz, o lapis, o carvão.

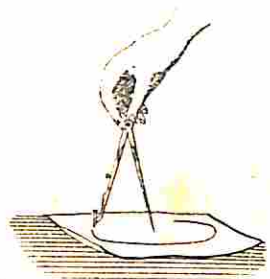



Fig. 289. — Modo de traçar uma circumferencia sobre papel.

Em um terreno plano, fixamos uma estaca na qual prendemos, por uma das extremidades, um cordel, e na outra extremidade é collocada uma ponteira ou uma vara destinada a traçar a **circumferencia** (fig. 290). A estaca

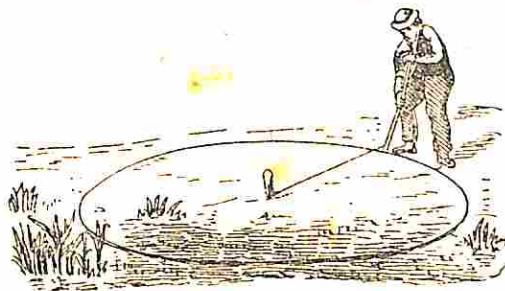



Fig. 290. — Circumferencia traçada por um jardineiro.

occupa o *centro*, o cordel bem esticado é o *raio* e a ponteira ou a vara risca a **circumferencia.**

Problema 108. — Fazer passar uma circumferencia por tres pontos não em linha recta.

Sejam A, B e C os pontos (fig. 291). Unamos os pontos A e B ao ponto C; tracemos uma perpendicular pelo meio de BC e outra pelo meio de AC. Façamos centro em M (ponto de encontro das duas perpendiculares) e com o raio MB descrevamos a **circumferencia** que passará forçosamente pelos pontos A, B e C.

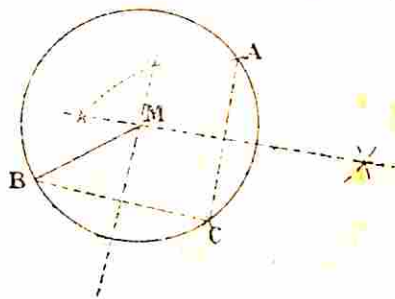



Fig. 291.

Problema 109. — Determinar o centro de uma circumferencia ou de um arco.

Seja ABC o arco cujo centro não é conhecido (fig. 292).

Unamos o ponto B aos pontos A e C, e tracemos pelos meios d'estas cordas duas perpendiculares que determinarão o ponto M, isto é, o *centro* do *arco*.

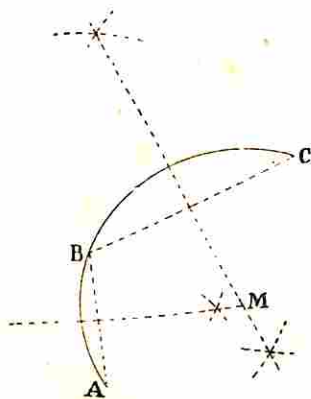
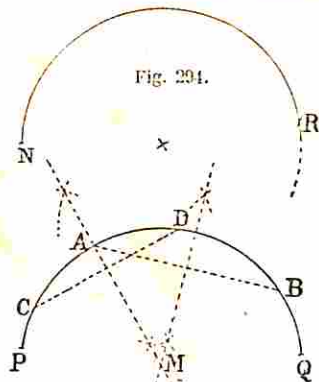



Fig. 292.

Problema 110. — Descrever um arco egual a um outro.

Tracemos duas cordas quaesquer AB e CD no arco dado (fig. 293) e pelo meio de cada uma d'ellas façamos passar uma perpendicular.

As duas perpendiculares encontram-se no ponto M que é o centro do arco.

Com um raio MA descrevamos um arco (fig. 294) e reproduzamos em NR, a medida PQ, do arco conhecido.

Fig. 294.

Fig. 293.

Problema 111. — Por um ponto dado em uma circumferencia, traçar uma tangente a esta circumferencia.

Unamos o centro O ao ponto dado M (fig. 295). Prolonguemos OM de uma distancia MB = OM e depois

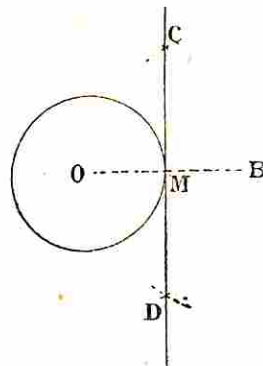



Fig. 295.

façamos passar pelo meio de OB a perpendicular CD que é a **tangente** pedida.

Problema 112. — Por um ponto dado fóra de uma circumferencia, traçar uma tangente a esta circumferencia.

Fig. 296.

Unamos o centro O ao ponto M e sobre OM (fig. 296) como diametro, tracemos um arco que corte a circumferencia em dois pontos C e D. As rectas CM e DM são **tangentes** á circumferencia O.

Problema 113. — Traçar uma tangente a um arco por um ponto dado nesse arco do qual não se póde determinar o centro.

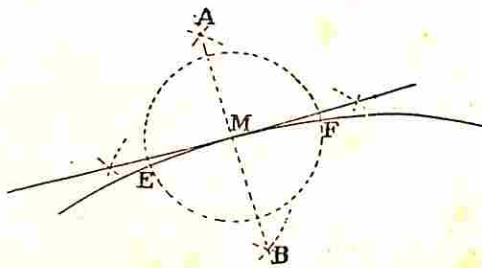



Fig. 297.

Seja M o ponto dado no arco (fig. 297).

Façamos centro nesse ponto e descrevamos uma circumferencia de raio arbitrario; essa circumferencia corta o arco em E e F dos quaes, como centro, determinemos A e B.

Unamos entre si A e B e tracemos pelo ponto M uma perpendicular á recta AB.

Esta perpendicular é a **tangente** pedida.

Outra solução. — Tiremos uma corda que parta do ponto dado A e dividamol-a ao meio por uma perpendicular (fig. 298).

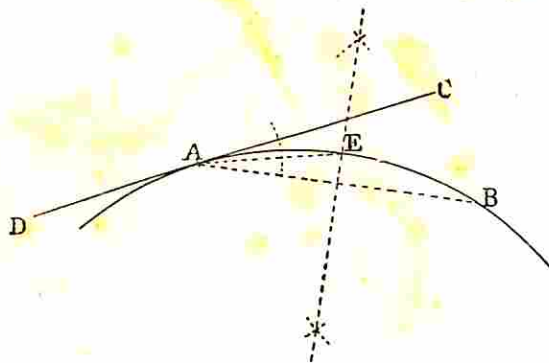



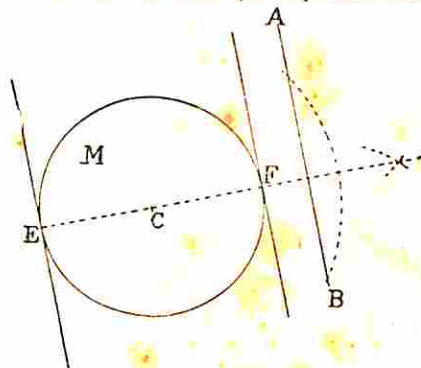
Fig. 298.

Tracemos a recta EA e depois o angulo CAE = angulo EAB. CD é a tangente.

Problema 114. — Dada uma circumferencia e uma recta fóra do circulo, traçar á mesma circumferencia uma ou duas tangentes, parallelas á recta.

Seja M a circumferencia cujo centro é C (fig. 299), e AB a recta situada fóra do circulo limitado por essa mesma circumferencia.

Façamos passar por C uma perpendicular á recta AB; esta perpendicular determinará na circumferencia os pontos E e F que serão os de contacto das duas tangentes.

Tracemos com a regua e o esquadro as rectas parallelas a AB e que passem por aquelles dois pontos.

Problema 115. — Traçar duas rectas tangentes a duas circumferencias.

Façamos passar uma recta pelos centros M e N das duas circumferencias (fig. 300).

Reproduzamos em EF, a medida do raio da circumferencia menor.

Fig. 299.

Centro em M e raio = MF descrevamos uma circumferencia.

De G, (meio de MN) como centro e com um raio GM

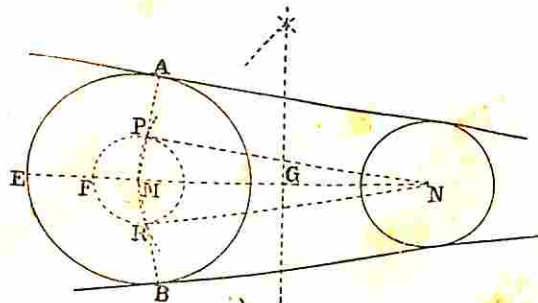



Fig. 300.

descrevamos um arco que determine os pontos P e R.

Tracemos de M duas rectas que passem por P e R e terminem respectivamente em A e B.

Unamos P e R ao centro N.

De A tiremos uma parallela a PN e de B, outra a RN.

Problema 116. — Traçar duas rectas tangentes a duas circumferencias de modo que se cortem e o ponto de intersecção fique entre as mesmas circumferencias.

Unamos os centros A e B (fig. 301) e tracemos os dois raios AM e BN parallelos e collocados um em relação ao outro, em sentido opposto.

Unamos M a N por uma recta que cortará AB no ponto C.

Fig. 301.

Determinemos os pontos E (meio de AC) e F (meio de CB).

Descrevamos as duas circumferencias cujos centros são E e F, e cujos respectivos raios são EA e FC.

Essas circumferencias determinam os pontos G e H, L e J.

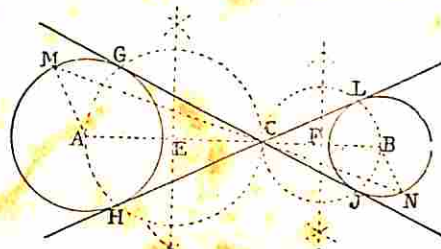
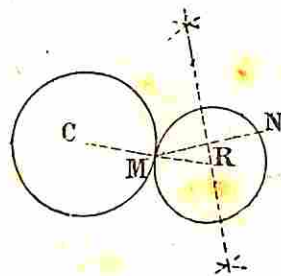
Tracemos as rectas que passam por GJ e HL, as **tangentes** pedidas.

Problema 117. — Descrever uma circumferencia tangente a uma outra em um ponto dado, e passando por um ponto situado fóra d'essa circumferencia.

Fig. 302.

Sejam M e N (fig. 302) os dois pontos dados, este fóra e aquelle situado na circumferencia C. Unamos por linhas rectas o ponto M aos pontos C e N, prolonguemos indefinidamente o raio CM. Façamos passar uma perpendicular pelo meio da recta MN; do ponto de intersecção R, com um raio RM des-

crevamos uma circumferencia que será tangente á primeira no ponto M e passará pelo ponto N.

Problema 118. — Descrever uma circumferencia tangente a uma outra em um ponto dado, e passando por um ponto situado no interior da circumferencia.

Tracemos o raio CM (fig. 303) e unamos entre si os pontos M e N; façamos passar pelo meio da recta MN uma perpendicular e do ponto de intersecção P, como centro, com um raio egual a PM, descrevamos uma circumferencia que será **tangente** á primeira no ponto dado M e passará pelo ponto N.

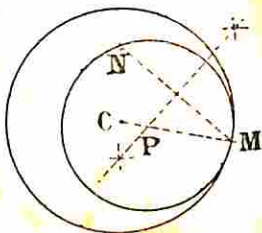



Fig. 303.

Problema 119. — Descrever uma circumferencia que seja tangente a uma recta em um ponto dado e passe por um outro ponto fóra d'essa recta.

Seja MN a recta, A o ponto d'essa recta, e B o outro ponto fóra (fig. 304).

Unamos o ponto A ao ponto B e façamos passar pelo meio uma perpendicular.

Tiremos do ponto A uma perpendicular a MN; esta ultima cortará a que passa pelo meio de AB determinando o ponto C que será o centro da circumferencia desejada.

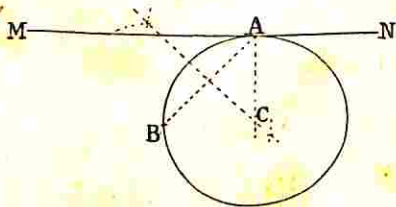



Fig. 304.

Problema 120. — Descrever uma circumferencia tangente a uma recta e passando por dois pontos fóra da recta.

Sejam A e C os pontos fóra da recta MN (fig. 305).

Tiremos por CA uma recta até determinar o ponto E.

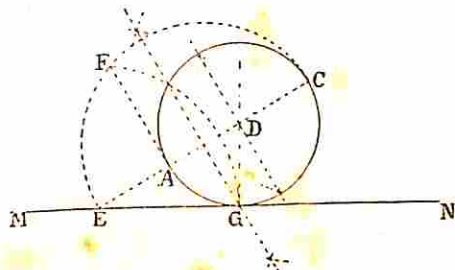



Fig. 305.

Dividamos a recta EC ao meio e descrevamos a semi-circumferencia EC.

Do ponto A levantemos uma perpendicular a EC até determinar o ponto F na semi-circumferencia.

Centro em E e raio egual a EF descrevamos o arco FG.

De G levantemos uma perpendicular e pelo meio de AC façamos passar outra perpendicular que se encontrará com a primeira no ponto D, centro da circumferencia **tangente**.

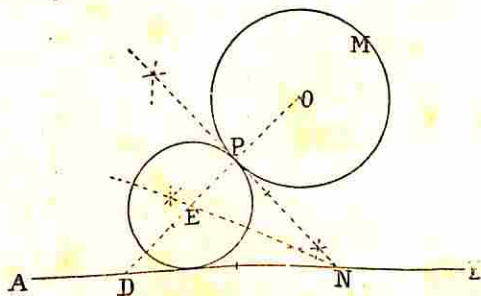



Fig. 306.

Problema 121. — Descrever uma circumferencia tangente a uma outra e a uma recta dada.

Seja AB a recta e M a circumferencia (fig. 306).

Do centro O tracemos um raio qualquer de modo que seu prolongamento córte a recta dada, e por P façamos passar uma perpendicular até marcar o ponto N na recta A B.

Tracemos a bissectriz do angulo P N A, a qual cortará a recta O D no ponto E.

Descrevamos com o raio E P e centro em E a circumferencia pedida.

Problema 122. — Descrever uma circumferencia tan-

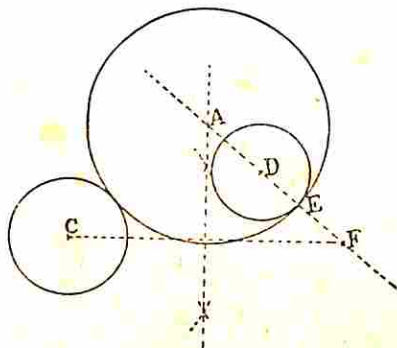



Fig. 307.

gente a duas outras de modo que uma fique no circulo limitado pela circumferencia e a outra fóra.

Pelo centro D, da circumferencia menor, (fig. 307) façamos passar uma recta qualquer e marquemos E F = ao raio da circumferencia maior.

Unamos C a F e pelo meio de C F tracemos uma perpendicular que determinará o ponto A na recta que passa por D.

Centro em A e com um raio A E, descrevamos uma circumferencia que tangenciará as duas circumferencias dadas.

Problema 123. — Descrever duas circumferencias tangentes a uma terceira e a uma recta em um ponto dado.

Pelo ponto dado M tracemos uma perpendicular á recta conhecida (fig. 308).

Marquemos as distancias M N e M P eguaes, cada uma, ao raio C D da circumferencia dada.

Unamos C a N e a P.

Pelo meio de C N e C P tracemos perpendiculares que

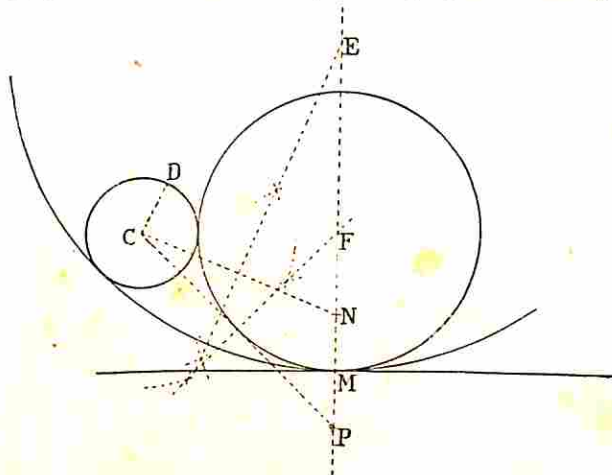



Fig. 308.

determinarão os pontos E e F, centros das duas circumferencias tangentes cujos raios respectivos são E M e F M.

Descrevamol-as e resolveremos o problema.

Problema 124. — Descrever quatro circumferencias tangentes a tres rectas que se cortem duas a duas.

As rectas A B, C D e E F cortam se duas a duas formando um triangulo M N O (fig. 309).

Tracemos as bissectrizes dos angulos d'esse triangulo, prolongando-as e tambem as de tres dos angulos externos d'esse mesmo triangulo, por exemplo, de F M O, N O D e M N A prolongando-as em ambas as direcções.

Essas bissectrizes, o são tambem dos angulos vertical-

mente oppostos e encontram-se com as dos angulos internos nos pontos 1, 2 e 3 que são os centros das circumferencias

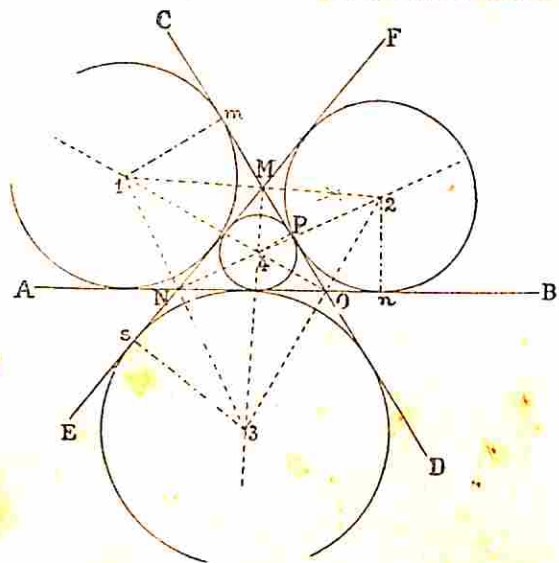



Fig. 309.

tangentes exteriores cujos raios são respectivamente as perpendiculares $1m$, $2n$ e $3s$.

O ponto 4 será o centro e $4p$ o raio da circumferencia inscripta no triangulo.

Problema 125. — Descrever diversas circumferencias tangentes entre si e a duas rectas convergentes.

Tracemos a bissectriz do angulo MVN formado pelas rectas convergentes MV e NV (fig. 310).

Tomemos o ponto A da recta MV como primeiro ponto de contacto e por elle levantemos uma perpendicular até determinar o ponto E na bissectriz.

Com o raio EA e centro em E descrevamos a primeira circumferencia.

Pelo ponto F façamos passar uma perpendicular á bissectriz e de G, como centro e raio GF descrevamos o arco FH.

D'este ultimo ponto H levantemos outra perpendicular á recta MV até determinar o ponto J na bissectriz.

Centro em J e raio JF descrevamos a segunda circumferencia tangente á primeira e ás duas rectas convergentes.

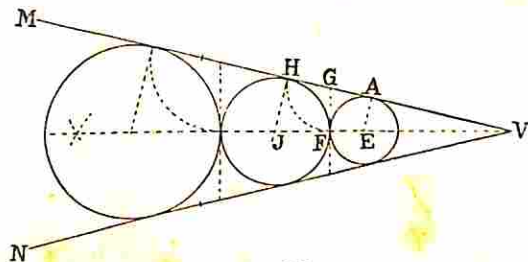



Fig. 310.

Proseguindo d'esse modo, obteremos tantas circumferencias tangentes, quantas quizermos.

EXERCICIOS

1. — Aloysa! traça uma circumferencia
2. — Que é uma circumferencia?
3. — Como se chama a porção de superficie plana limitada pela circumferencia?
4. — Conheces alguns objectos usuaes que têm a fórma de um circulo? Exemplos.
5. — Que é um raio?
6. — Traça um raio.
7. — Que é um diametro?
8. — Traça um diametro.
9. — Que é um arco? — uma corda? — uma flecha?
10. — Traça um arco, uma corda, uma flecha.
11. — Que é uma secante? — uma tangente?
12. — Traça uma secante, — uma tangente.

13. — Desenha um segmento, — um sector.
14. — Que é um segmento? — um sector?
15. — Traça um angulo central.
16. — Traça um angulo inscripto.
17. — Os lados de um angulo central, que são em relação á circumferencia?
18. — E os lados de um angulo inscripto? — de um angulo circumscripto?
19. — Traça um angulo circumscripto.
20. — Que é um angulo central? — um angulo inscripto? — um angulo circumscripto?
21. — Traça tres circumferencias concentricas.
22. — Quantos centros póde ter uma circumferencia?
23. — Quantas circumferencias podem ter o mesmo centro?
24. — Que são circumferencias concentricas?
25. — Traça duas circumferencias excentricas.
26. — Que são circumferencias excentricas?
27. — Traça uma coróa circular.
28. — Que é uma coróa circular?
29. — Traça duas circumferencias tangentes.
30. — Que são circumferencias tangentes?
31. — Traça uma lunula.
32. — Que é uma lunula?
33. — Conheces os diversos modos de traçar uma circumferencia?
34. — Quaes são?
35. — Traça um arco. Apaga o centro e determina-o novamente.
36. — Traça um arco egual ao precedente.
37. — Traça uma tangente a uma circumferencia por um ponto dado. Faze o mesmo a um arco cujo centro não possas determinar.
38. — Traça uma circumferencia de 0m,02 de raio e uma recta de 0m,06 de comprimento e depois traça duas tangentes á circumferencia e parallelas á recta
39. — Traça duas rectas tangentes a duas circumferencias tendo uma o raio = 0m,03 e a outra = 0m,025.
40. — Traça uma circumferencia de 0m,08 de diametro e outra de 0m,028 de raio e depois duas rectas tangentes a ellas, de modo que se cortem e o ponto de intersecção fique entre as mesmas circumferencias.

41. — Traça uma circumferencia de 0m,032 de raio e marca um ponto fóra d'ella. Faze passar por esse ponto e por um outro da curva uma circumferencia tangente.
42. — Descreve uma circumferencia de 0m,07 de diametro, marca-lhe um ponto e um outro no circulo por ella limitado. Faze passar por esses dois pontos uma circumferencia que seja tangente á primeira.
43. — Traça uma recta de 0m,08 e marca fóra d'ella dois pontos. Faze passar por esses dois pontos uma circumferencia que seja tangente á recta.
44. — Traça uma recta de 0m,09 e uma circumferencia de 0m,012 de raio. Faze passar uma circumferencia tangente a ambas.
45. — Traça um triangulo qualquer; prolonga-lhe os lados e descreve quatro circumferencias tangentes a estas rectas que se cortam duas a duas.
46. — Faze um angulo egual a 1/3 do angulo recto e traça quatro circumferencias que sejam tangentes interiores aos lados do angulo e tambem o sejam entre si.
47. — Em um angulo de 60° (2/3 do angulo recto) com o centro a 4 centimetros do vertice, sobre a bissectriz, traça uma circumferencia que tangencie os lados d'esse angulo.
48. — Descreve uma circumferencia tangente a duas rectas parallelas distantes 0m,04 uma da outra.

CAPITULO VIII

SUMMARIO : **Polygonos. — Polygonos regulares, irregulares, inscriptos, circumscriptos, estrellados. — Medida dos angulos. — Divisão da circumferencia. — Problemas.**

POLYGONOS.

Uma superficie plana limitada por muitas rectas chama-se **polygono** (fig. 311). Estas rectas são os lados do **polygono.** Á somma dos lados de um **polygono** dá-se o nome de *perimetro.*

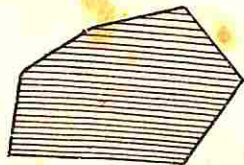



Fig. 311. — Polygono.

Geralmente a denominação de **polygono** é dada ás superficies planas limitadas por mais de quatro rectas, entretanto algumas ha que

têm nome especial, assim por exemplo :

um polygono de

- 5 lados — *pentagono.*
- 6 lados — *hexagono.*
- 7 lados — *heptagono.*
- 8 lados — *octogono.*
- 9 lados — *enneagono.*
- 10 lados — *decagono.*
- 11 lados — *hendecagono.*
- 12 lados — *dodecagono.*
- 15 lados — *pentadecagono.*
- 20 lados — *icosagono.*

Um **polygono** póde ter angulos rectos, agudos, obtusos, salientes, reintrantes, eguaes e deseguaes.

Um **polygono** é *regular* ou *irregular.*

Se os lados e angulos são eguaes, o **polygono** é *regular;* e se são deseguaes, o **polygono** é *irregular.*

A recta que une dois vertices não consecutivos de um **polygono** chama-se *diagonal.*

Já sabemos que a somma dos angulos de um ***triangulo*** é egual a dois angulos rectos; portanto para conhecermos a somma dos an-

gulos de um **polygono** qualquer, decompol-o em triangulos, pelas diagonaes partindo de um só vertice, (fig. 312).

Tantos triangulos : tantas vezes dois angulos rectos ; assim, por exemplo, um pentagono (fig. 312) decompõe-se em tres triangulos e a somma de seus angulos é egual a 3 vezes 2 angulos rectos ou 6 angulos rectos.

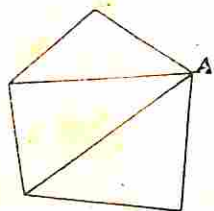



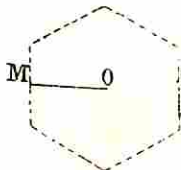
Fig. 312. — Um pentagono decomposto em tres triangulos.

A somma dos angulos de um **polygono** é egual a tantas vezes dois angulos rectos, quantos são os lados, menos dois.

Entre os triangulos, o equilatero ou equiangulo é regular; e entre os quadrilateros, é regular o quadrado. Todo o **polygono regular** póde ser sempre inscripto em um circulo.

A recta que une o centro do **polygono** ao meio de um de seus lados chama-se ***apothema*** (fig. 313).

Fig. 313. Apothema O M.

Um **polygono** é ***inscripto*** em um circulo quando os vertices de seus angulos se acham na circumferencia que limita o circulo e seus lados são cordas. O **polygono** ABCDEF é ***inscripto*** no circulo C (fig. 314).

Um **polygono** é ***circumscripto*** a um circulo quando os lados são tangentes á circumferencia que limita o circulo. O **polygono** MNPRS (fig. 315) é ***circumscripto*** ao circulo O.

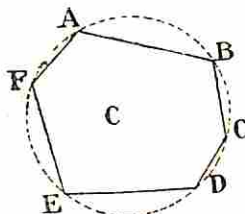
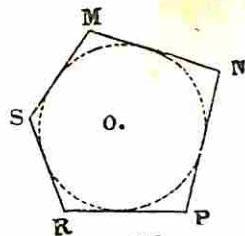



Fig. 314.

Fig. 315.

Um **polygono** que tem angulos alternativamente salientes e reintrantes chama-se ***estrellado.***

MEDIDA DOS ANGULOS. DIVISÃO DA CIRCUMFERENCIA.

Medir um angulo é comparal-o com um outro angulo tomado para unidade de medida.

A *unidade* para medir os angulos obtem-se dividindo um angulo recto em noventa partes eguaes.

Cada uma d'essas partes eguaes chama-se um **gráo.**

O **gráo** divide-se em **minutos** e **segundos.** *Sessenta* **minutos** fazem um **gráo** e *sessenta* **segundos** fazem um **minuto.**

O **gráo** é designado por um *zero* collocado á direita e um pouco acima do numero que o exprime. Exemplo : 6° lê-se *seis gráos.*

O **minuto** é designado por um *accento* e o **segundo** por dois collocados no mesmo logar do zero para designar o gráo. Exemplo : 9′ lê-se *nove minutos ;* 14″ lê-se *quatorze segundos.*

19° 14′ 8″ lê-se : *dezenove gráos, quatorze minutos e oito segundos.*

Cada angulo de um polygono regular de	*3 lados mede . . .*	*60°*
	4 — . . .	*90°*
	5 — . . .	*108°*
	6 — . . .	*120°*
	8 — . . .	*135°*
	9 — . . .	*140°*
	10 — . . .	*144°*
	12 — . . .	*150°*
	15 — . . .	*156°*
	16 — . . .	*157°,5*
	18 — . . .	*160°*
	20 — . . .	*162°*

Observemos qual a relação que existe entre os **angulos** e os **arcos** comprehendidos entre seus lados e descriptos com o mesmo raio a partir de seus vertices.

Comparemos na figura 316 os **angulos** AOB, AOC, AOD, AOE com os **arcos** AB, AC, AD, AE comprehendidos entre

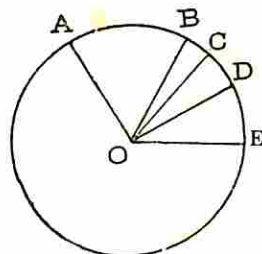



Fig. 316.

seus lados, e veremos que ao maior angulo corresponde maior arco e ao menor angulo, menor arco. D'ahi tiramos a conclusão de que em uma mesma circumferencia, ao **maior angulo central** corresponde **maior arco** e ao **menor angulo, menor arco.**

Em um mesmo circulo ou em circulos eguaes, aos angulos centraes eguaes correspondem arcos tambem eguaes ; o que podemos verificar práticamente, fazendo coincidir por

superposição dois angulos depois de traçados e recortados em cartão.

Para *medir* ou *transferir* um angulo no papel ou no cartão, usamos de um instrumento chamado *transferidor* (fig. 317).

O *transferidor* consiste geralmente em um semi-circulo de madeira, chifre, ou latão, cuja

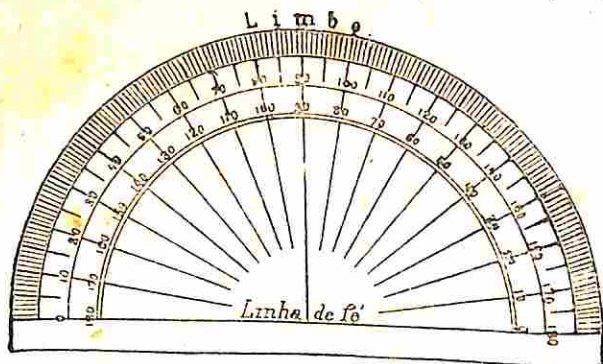



Fig. 317.

semi-circumferencia é dividida em 180 partes eguaes. Cada uma d'essas 180 partes eguaes chama-se um **gráo.** A essa semi-circumferencia dá-se o nome de *limbo*, e ao diamet o que liga as extremidades da semi-circumferencia, o nome de *linha de fé.*

O **angulo central** tem por medida o arco comprehendido entre seus lados.

O **angulo inscripto** tem por medida a

metade do arco comprehendido entre seus lados.

O **angulo** AVB (fig. 318) tem por medida a metade do arco AB, porque si fizermos passar pelo ponto C a recta MN parallela a VB, os angulos AVB e ACN serão eguaes

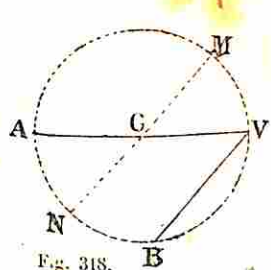



Fig. 318.

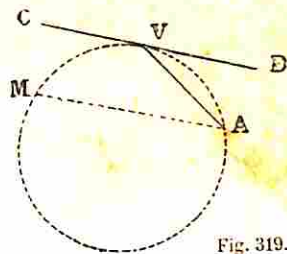



Fig. 319.

como *correspondentes;* ora a **angulo** ACN sendo **central** tem por medida o arco AN comprehendido entre seus lados; mas AN é egual a MV porque estes dous arcos são a medida de dois angulos eguaes ACN e MCV; de mais, por causa das parallelas MN e VB, NB é egual a MV; portanto NB é egual a AN. O angulo ACN tem por medida a metade do arco ANB e o **angulo** AVB que é egual ao angulo ACN tem a mesma medida.

O **angulo do segmento** tem por medida a metade do arco subtendido pela corda que fórma um de seus lados.

O **angulo** AVB (fig. 319) tem por medida

a metade do arco VA porque, se tirarmos do ponto A uma recta AM parallela a BC, o angulo AVB ficará egual ao angulo VAM como *alternos-internos*, formados pelas parallelas CB e MA e pela obliqua VA. O angulo inscripto VAM tem por medida a metade do arco VM, que é egual ao arco VA; portanto o

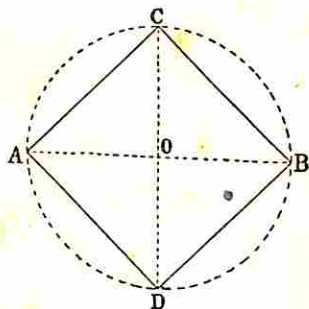



Fig. 320.

angulo do segmento AVB tem por medida a metade do arco VA.

Problema 126. — Inscrever um quadrado em um circulo.

Tracemos um diametro qualquer AB (fig. 320); tracemos um segundo diametro CD perpendicular ao primeiro; unamos, duas a duas, as extremidades A, C, B, D, e o polygono formado é o **quadrado** inscripto no circulo O.

A circumferencia ficou dividida em quatro partes eguaes.

Problema 127. — Inscrever um hexagono regular e um triangulo equilatero em um circulo.

A inscripção de um **hexagono regular** em um circulo ou a divisão da circumferencia em seis partes eguaes é simples.

Tracemos uma circumferencia e um diametro AB (fig. 321).

Façamos centro em A e depois em B e com um mesmo raio egual a OA determinemos os pontos C, D, E, F. Tracemos a linha polygonal ADFBECA e teremos o hexagono regular inscripto.

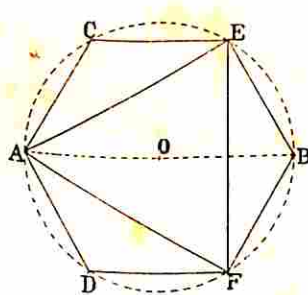
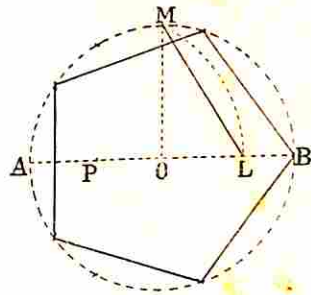



Fig. 321.

Fig. 322.

Para inscrevermos em um circulo um triangulo equilatero, juntaremos os vertices não consecutivos; assim por exemplo: unamos os pontos AEF da figura 321 e acharemos o triangulo equilatero inscripto no circulo O.

Problema 128. — Inscrever em um circulo um pentagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos um diametro AB (fig. 322). Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

Tomemos o meio do raio OA. Do ponto P como centro e com o raio egual a PM determinemos o ponto L, o qual, ligado ao ponto M nos dá o lado do **pentagono** regular inscripto no circulo O.

Appliquemos sobre a circumferencia, a partir de B, duas vezes a medida LM para um e para outro lado:

unamos dois a dois os pontos de divisão da circumferencia e teremos o pentagono.

Problema 129. — Inscrever em um circulo um heptagono regular.

Descrevamos uma circumferencia (fig. 323) e tiremos um raio OA. Levantemos pelo meio do raió uma perpendicular BC até encontrar a circumferencia. A distancia do pé da perpendicular ao ponto em que ella encontra a circumferencia será o lado do **heptagono regular** inscripto.

Appliquemos a partir de A, sobre a circumferencia, tres vezes a medida BC, seguidamente, para um e para outro lado. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

Problema 130. — Inscrever em um circulo um octogono regular.

Inscrevamos um **quadrado** (fig. 324), tiremos a bisse-

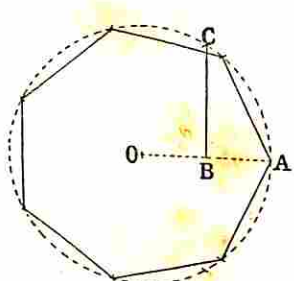



Fig. 323.

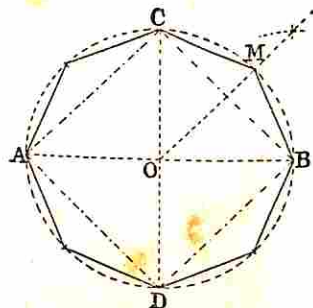



Fig. 324.

ctriz do angulo COB; unamos o ponto M ao ponto B. A distancia MB é o lado do **octogono regular** inscripto.

Procedamos egualmente quanto aos angulos BOD, AOD, AOC e d'esse modo dividiremos a circumferencia em 8 partes eguaes. Unamos os pontos de divisão dois a dois.

Problema 131. — Inscrever em um circulo um enneagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois diametros perpendiculares entre si (fig. 325). Com o centro em B e com o mesmo raio (OB) descrevamos um arco OG; com o centro em A e com o raio egual á distancia AG, descrevamos um arco GC até encontrar o prolongamento do diametro FE. Com o centro no ponto C e com a distancia AC ou BC tracemos o arco BD. A distancia DF será o lado do **enneagono regular** inscripto.

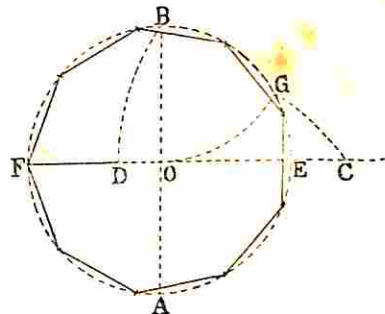



Fig. 325.

Reproduzamos sobre a circumferencia, e a partir do ponto F, a medida DF, quatro vezes seguidamente para cada lado e unamos os pontos obtidos dois a dois.

Outra solução. — Tracemos a circumferencia e tiremos

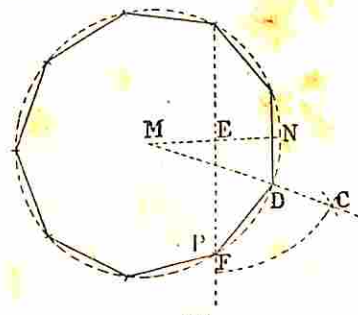



Fig. 326.

o raio MN (fig. 326) pelo meio do qual façamos passar uma perpendicular.

Centro em E e com o mesmo raio da circumferencia des-

crevamos um arco que cortará a perpendicular em F; centro nesse ponto e com o mesmo raio, descrevamos um outro arco que determinará o ponto C. Unamos M a C por uma recta, que cortará a circumferencia no ponto D. DP é o lado do enneagono regular; procedamos como indica a 1.ª solução.

Problema 132. — Inscrever em um circulo um decagono regular.

Descrevamos uma circumferencia, e tracemos um diametro AB (fig. 327).

Determinemos o meio da semi-circumferencia AMB.

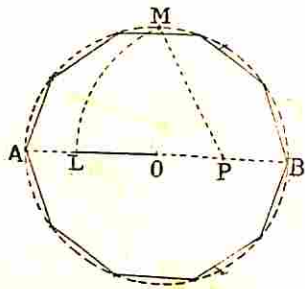



Fig. 327.

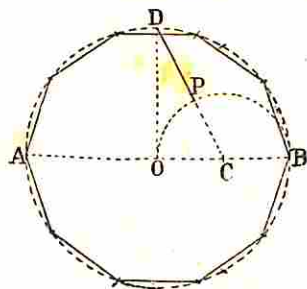



Fig. 328.

Tomemos o meio do raio OB e, a partir do ponto P para o ponto A, marquemos no diametro a distancia PL egual a PM. A distancia OL será o lado do **decagono regular** inscripto.

Appliquemos sobre a circumferencia, e a partir dos pontos A e B, a distancia OL duas vezes seguidamente para cada lado; unamos esses pontos de divisão dois a dois.

Outra solução. — Tracemos um diametro AB (fig. 328) e o raio OD perpendicular ao mesmo diametro.

Dividamos OB ao meio e unamos C a D.

Centro em C e raio egual a CB determinemos o ponto P. DP é o lado do decagono regular inscripto.

Procedamos então como na 1.ª solução.

Problema 133. — Inscrever em um circulo um hendecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos o diametro AB (fig. 329).

Tomemos o meio da semi-circumferencia ACB e tambem do raio OB. Unamos o ponto C ao ponto D e dividamos ao meio a recta CD.

Com o compasso appliquemos seguidamente a metade de CD, cinco vezes de cada lado, a partir de B e depois de unidos os pontos de divisão, teremos o hendecagono regular inscripto.

Outra solução. — Tracemos um diametro AB (fig. 330).

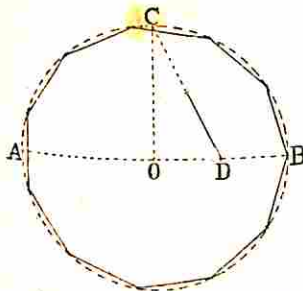



Fig. 329.

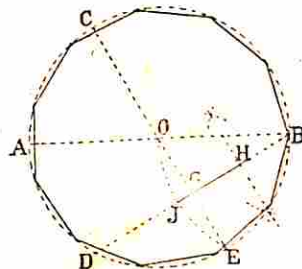



Fig. 330.

Façamos centro em A e, com um raio OA marquemos C e D.

Centro em B e com o mesmo raio, descrevamos OE.

Unamos entre si D e B, C e E. Dividamos GB ao meio e teremos JH, que é o lado do hendecagono. Procedamos como na 1.ª solução.

Problema 134. — Inscrever em um circulo um dodecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e tracemos dois dia-

metros AB e CD perpendiculares entre si (fig. 331).

Centro em cada uma das extremidades dos diametros e com o mesmo raio da circumferencia determinemos os pontos: 1 e 2 da extremidade A; 3 e 4 de B; 5 e 6 de C e 7 e 8 de D.

Unamos dois a dois esses pontos e teremos o polygono pedido.

Problema 135. — Inscrever em um circulo um pentadecagono regular.

Descrevamos uma circumferencia e determinemos o

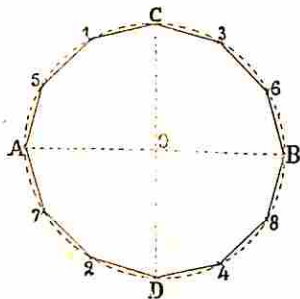



Fig. 331.

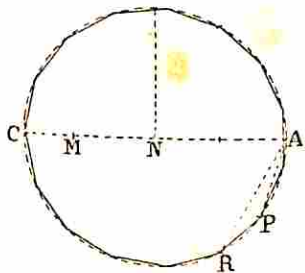



Fig. 332.

lado do decagono regular inscripto. MN é o lado do decagono (fig. 332).

A partir de um ponto qualquer A, appliquemos a medida AR egual ao lado do hexagono regular inscripto (AR = NA) e AP = MN.

A corda PR é o lado do pentadecagono regular inscripto; appliquemol-a pois a partir do ponto C e sobre a circumferencia sete vezes de cada lado. Unamos dois a dois os pontos de divisão.

Problema 136. — Medir um angulo ou um arco com o transferidor.

Para medir um angulo (fig. 333) façamos coincidir o centro do transferidor com o vertice do angulo que se quer medir e a linha de fé com um dos lados do angulo.

A divisão do limbo, sob a qual fica o outro lado do angulo, determina seu valor

Para determinar o numero de gráos de um arco, ligamos as extremidades d'esse arco ao seu centro por meio dos raios e medimos o angulo central. A medida do angulo central é a do arco.

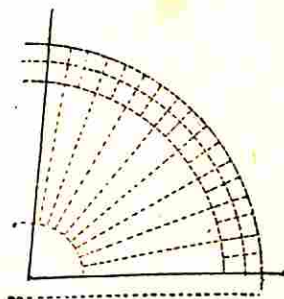



Fig. 333.

Problema 137. — Construir um angulo com o transferidor.

Tracemos uma recta, marquemos sobre ella um ponto; façamos coincidir o centro do transferidor com esse ponto e a linha de fé com a recta; procuremos no limbo a medida do angulo e marquemos um ponto defronte do limite d'essa medida. A recta que une esses dous pontos fórma, com a primeira, o angulo pedido

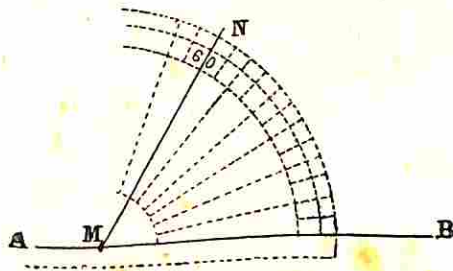



Fig. 334.

Exemplo: — Seja de 60° o angulo que desejamos construir.

Tracemos uma recta AB (fig. 334), tomemos sobre ella

o ponto M, façamos coincidir o centro do transferidor com o ponto M e a linha de fé com a recta AB. Marquemos depois um ponto N defronte da divisão 60 a contar da direita para a esquerda; unamos o ponto N ao ponto M NMB é o angulo pedido.

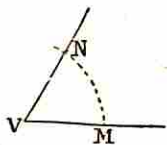
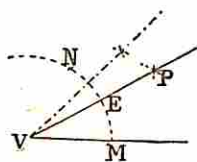
Problema 138.—Traçar com o compasso e a regua um angulo de 60°

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario, descrevamos um arco de modo que determine o ponto M na mesma recta (fig. 335).

Fig. 335.

Fig. 336.

Façamos centro n'esse ponto e com o mesmo raio determinemos o ponto N.

Unamos V a N e formaremos o angulo NVM.

Problema 139. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 30°, de 15° e de 45°.

Pela extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco, de modo que determine o ponto M na recta (fig. 336).

Façamos centro em M e com o mesmo raio marquemos o ponto N. De M e N determinemos o ponto P, o qual unido a V fórma o angulo de 30°.

Procedendo-se de modo egual e por fim traçando-se a bissectriz do angulo de 30° ter-se-á o de 15°

Se dividirmos o arco NE ao meio e unirmos o ponto achado ao vertice V faremos com a recta VM um angulo de 45°.

Problema 140. — Traçar com a regua e o compasso um angulo de 120°.

Façamos centro na extremidade V de uma recta e com um raio arbitrario descrevamos um arco que determine o ponto M (fig. 337).

Appliquemos sobre o arco duas vezes, consecutivamente e a partir de M, o mesmo raio.

Unamos o ponto P a V e teremos formado o angulo PVM.

Problema 141. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 135°.

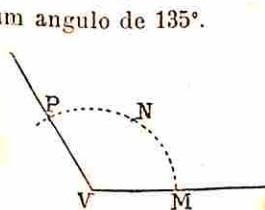



Fig. 337.

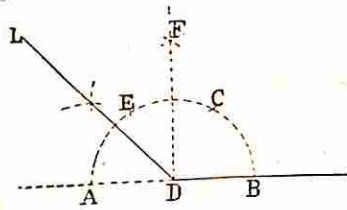



Fig. 338.

De um ponto D em uma recta e com um raio arbitrario descrevamos a semi-circumferencia AB (fig. 338).

Com o mesmo raio, determinemos de B o ponto C; d'este, o ponto E e dos pontos E e C o ponto F.

Unamos este ultimo ponto a D.

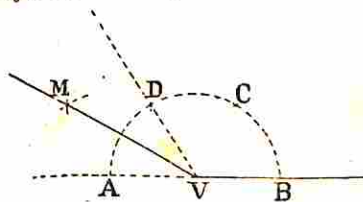
Tracemos a bissectriz do angulo ADF e obteremos o angulo pedido LDB.

Problema 142. — Traçar com o compasso e a regua um angulo de 150°.

Por um ponto V de uma recta e com um raio arbitrario tracemos a semi-circumferencia AB (fig. 339).

Appliquemos esse mesmo raio de B em C e de C em D.

Fig. 339.

A bissectriz VM do angulo DVA fórma com VB o angulo pedido MVB.

Problema 143. — Traçar um pentagono regular conhecendo-se um lado.

Seja A B o lado (fig. 340).

Formemes um angulo de 108° na extremidade B e appliquemos B C = A B.

Façamos passar perpendiculares pelo meio de A B e de B C.

Centro em O e com um raio egual a O A marquemos D e E.

Unamos entre si A e E, E e D, D e C.

A B C D E é o polygono pedido.

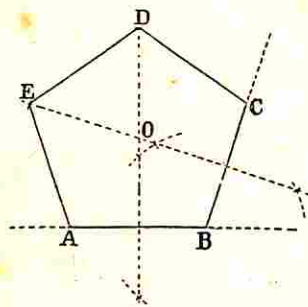



Fig. 340.

Problema 144. — Traçar um heptagono regular conhecendo-se um lado.

Seja de 15 millimetros a medida do lado.

Tracemos um heptagono inscripto em um circulo qualquer (fig. 341).

Tomemos um vertice como ponto de partida, A por exemplo, e prolonguemos os lados do angulo.

Façamos A B = 0m,015 e A G = A B.

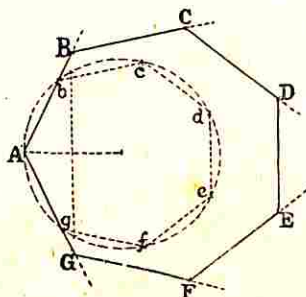
De B tiremos uma parallela a *bc* e de G, outra a *gf*.

Marquemos em B C e G F a medida A B.

Fig. 341.

De C tracemos uma parallela a *cd* e de F, outra a *fe*.

Façamos C D e F E eguaes, cada uma, a 0m,015, (A B) e finalmente unamos D a E.

A B C D E F G é o heptagono regular.

Outra solução. — Seja A B o lado (fig. 342).

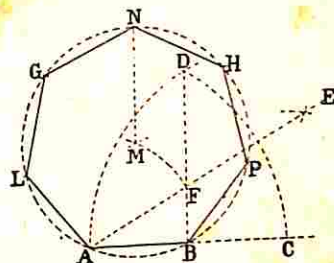
Prolonguemos esta recta de uma quantidade B C = A B.

Façamos centro em A e C e com um raio egual a A C determinemos o ponto D. Unamos este ponto a B e tracemos a recta A E que parte de A, divide o arco D C ao meio e corta a perpendicular B D no ponto F.

Com o centro em A e depois em B, e com um mesmo raio A F determinemos o ponto M, centro da circumferencia circumscripta ao heptagono; descrevamol-a com um raio = M B.

Fig. 342.

Tracemos M N parallela a B D e appliquemos em N G, N H, A L e B P a medida A B.

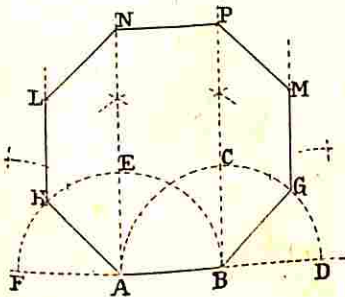
Unamos estes pontos como nos mostra a fig. 342 e teremos o **heptagono.**

Problema 145. — Traçar um octogono regular dado o lado.

Seja A B o lado (fig. 343).

Prolonguemol-o em ambas as direcções e levantemos perpendiculares por A e B.

Centro em cada um d'esses pontos e com o mesmo raio A B, descrevamos as duas semi-circumferencias que determinam os pontos C, D, E e F.

Fig. 343.

Tiremos as bissectrizes dos angulos C B D e F A E, as quaes assignalam os pontos G e H.

Por G e H tracemos rectas parallelas a BC e façamos HL e GM eguaes, cada uma, a AB.

De L e de M, como centros, e com um raio = AB, marquemos N e P.

Tracemos a linha quebrada LNPM e resolveremos o problema.

Outra solução. — Façamos passar pelo meio de AB

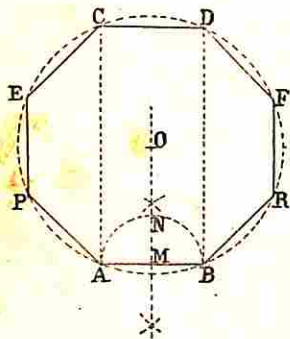



Fig. 344.

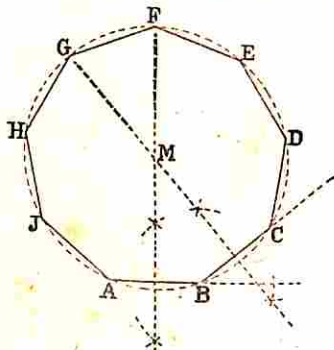



Fig. 345.

uma perpendicular (fig. 344) e com o centro em M e raio MA, descrevamos a semi-circumferencia ANB.

Com um raio egual a NA e centro em N determinemos o ponto O; finalmente centro em O e raio egual a O A descrevamos a circumferencia que será circumscripta ao octogono.

Tracemos AC e BD parallelas a MO e depois reproduzamos em CE, DF, AP e BR a medida AB.

Unamos C a D, D a F, A a P E a C, B a R, P a E e R a F.

Problema 146. — Traçar um enneagono regular conhecendo-se um lado.

Sobre uma recta marquemos AB egual ao lado dado, e pelo ponto B façamos um angulo = 140°, (fig. 345).

Appliquemos BC = AB e façamos passar pelo meio de AB e de BC, rectas perpendiculares que determinarão o ponto M, do qual, como centro e raio egual a MB descrevamos a circumferencia de circulo que cortará as perpendiculares em G e F.

Centro successivamente em A, C, G e F, e com um

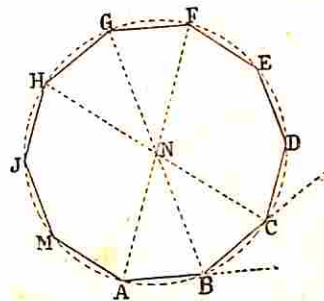



Fig. 346.

raio = AB determinemos os pontos J, D, H e E.

Tracemos a linha quebrada AJHGFEDC.

Problema 147. — Traçar um decagono regular conhecendo-se um lado.

Sobre uma recta appliquemos a medida AB egual ao lado dado e façamos no ponto B um angulo = 144°, (fig. 346).

Tracemos a bissectriz d'esse angulo e, pelo meio de AB a perpendicular que determina o ponto N do qual, como centro, e raio = NB descrevamos uma circumferencia que cortará a bissectriz no ponto G.

Tracemos os diametros AF e CH e de cada um dos pontos A, C, F e H, com um mesmo raio AB marquemos M, D, E e J.

Unamos entre si os pontos G—F, H—G, F—E, M—A, E—D, J—M, C—D e J—H.

Problema 148. — Traçar um dodecagono regular conhecendo-se um lado.

Formemos na extremidade B da recta AB (fig 347) um angulo de 150°; tracemos-lhe a bissectriz, e pelo meio de AB, uma perpendicular.

Centro em O e com um raio O B descrevamos uma circumferencia.

Tracemos o diametro EF perpendicular a BH e dividamos cada um dos angulos rectos BOF, BOE, HOE e HOF em tres partes.

Fig. 347.

Unamos dois a dois os pontos de divisão e obteremos o polygono desejado.

Problema 149. — Traçar um polygono regular (um pentagono, por exemplo) conhecendo-se uma diagonal.

Construamos um pentagono regular de qualquer dimensão (fig. 348) e de um vertice qualquer A, por exemplo, tiremos duas diagonaes, prolongando-as.

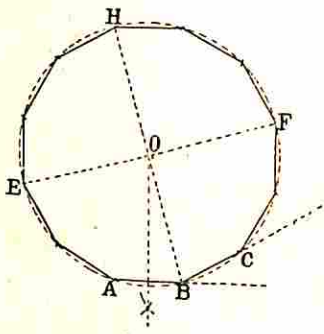
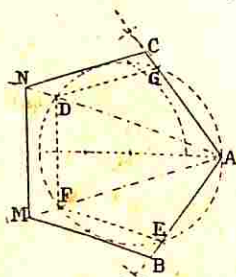
Appliquemos AM e AN eguaes, cada uma, á diagonal dada e unamos M a N.

Prolonguemos os lados do angulo A e, do ponto M, tracemos M B parallela á E F.

De N tiremos N C parallela á G D.

Fig. 348.

ABMNC é o polygono pedido.

Problema 150. — Traçar o polygono estrellado regular formado pelas diagonaes do pentagono regular.

Dividamos uma circumferencia em 5 partes eguaes, e unamos os pontos 1 a 3, 3 a 5, 5 a 2, 2 a 4 e 4 a 1 (fig. 349).

O polygono assim obtido tem cinco vertices salientes e cinco reintrantes, é formado pelas diagonaes de um pentagono regular, e é um decagono.

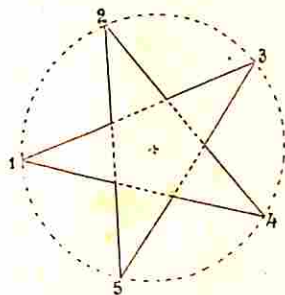



Fig. 349.

Problema 151. — Traçar o polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes menores de um hexagono regular.

Fig. 350.

Dividamos uma circumferencia em 6 partes eguaes e unamos os pontos : 1—3—5—1, 2—4—6—2 (fig. 350).

Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes menores de um hexagono regular.

Representa a figura resultante da superposição de dois triangulos equilateros eguaes, cujos centros coincidem e os lados de um são, dois a dois, parallelos aos do outro.

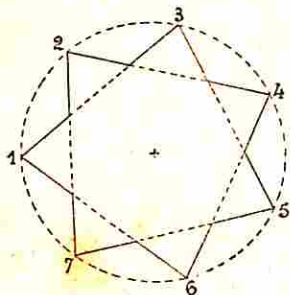



Fig. 351.

Problema 152. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um heptagono regular.

1.° caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 7 partes eguaes e unamos os pontos na ordem seguinte : 1—3—5—7—2—4—6—1, (fig. 351).

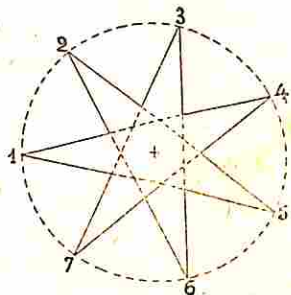
Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um heptagono regular.

2.° caso. — Diagonaes maiores. Unindo-se os pontos de divisão nesta ordem : 1—4—7—3—6—2—5—1 obteremos outro polygono, formado pelas diagonaes maiores do heptagono regular (fig. 352).

Ambos são polygonos de 14 lados e têm 7 vertices salientes e 7 reintrantes.

Fig. 352.

Problema 153. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um octogono regular.

1.° caso. — Diagonaes menores. Dividamos a circumferencia em 8 partes eguaes e unamos os pontos de divisão

do seguinte modo : 1—3—5—7—1 e 2—4—6—8—2 (fig. 353).

O polygono estrellado resultante é formado pelas diagonaes menores do octogono regular, é uma combinação

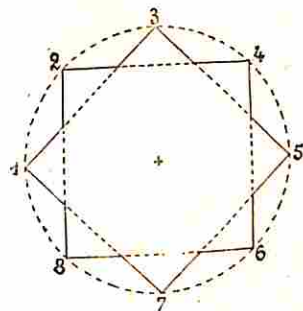



Fig. 353.

de dois quadrados superpostos cujos centros coincidem e cujos lados de um são parallelos ás diagonaes do outro.

2.° caso. — Diagonaes médias.

Unamos agora os pontos de divisão como indica a figura 354, isto é : 1—4—7—2—5—8—3—6—1.

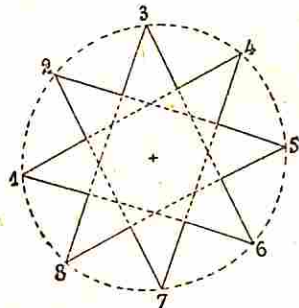



Fig. 354.

Resulta um polygono regular estrellado, formado pelas diagonaes médias de um octogono regular.

Ambos são polygonos de 16 lados com 8 vertices salientes e 8 reintrantes.

Problema 154. — Traçar os polygonos regulares estrellados, formados pelas diagonaes de um enneagono regular.

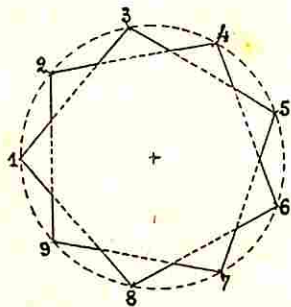



Fig. 355.

1.° caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 9 partes eguaes e unamos os pontos de divisão na seguinte ordem : 1—3—5—7—9—2—4—6—8—1 (fig. 355).

Este polygono é formado pelas diagonaes menores de um enneagono regular.

2.° caso. — Diagonaes médias.

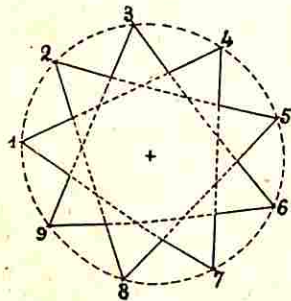



Fig. 356.

Unamos os pontos de divisão como nos mostra a fig. 356,

isto é, 1—4—7—1, 2—5—8—2, 3—6—9—3 e obteremos um outro polygono, formado pelas diagonaes médias de um enneagono regular.

Este polygono estrellado é o resultado da superposição de 3 triangulos equilateros inscriptos num mesmo circulo.

3.° caso. — Diagonaes maiores.

Finalmente, unamos os pontos de divisão na ordem seguinte : 1—5—9—4—8—3—7—2—6—1 (fig. 357) e teremos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes do enneagono regular.

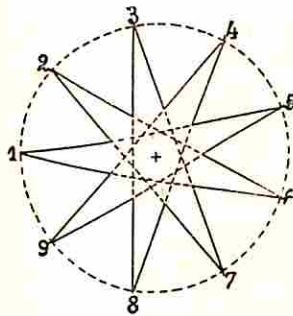
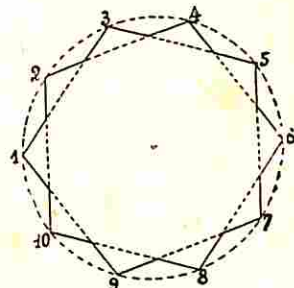



Fig. 357.

Fig. 358.

Estes tres polygonos estrellados têm, cada um, 18 lados eguaes, 9 vertices salientes e 9 reintrantes.

Problema 155. — Traçar os polygonos regulares estrellados formados pelas diagonaes de um decagono regular.

1.° caso. — Diagonaes menores.

Dividida a circumferencia em 10 partes eguaes, unamos os pontos de divisão d'este modo : 1—3—5—7—9—1, 2—4—6—8—10—2 (fig. 358). Resulta um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes de um decagono regular.

É a combinação de dois pentagonos regulares inscriptos em uma mesma circumferencia e collocados de modo que

os lados de um são, dois a dois, parallelos aos do outro.

2.° caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão seguidamente e pelo modo indicado na fig. 359, isto é : 1—4—7—10—3—6—9—

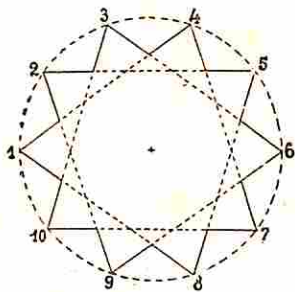



Fig. 359.

2—5—8—1 e resultará o polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um decagono regular.

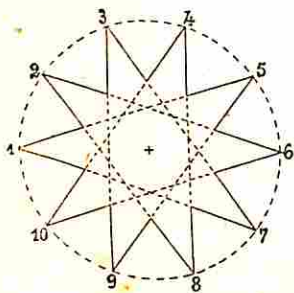
3.° caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos, finalmente, os pontos de divisão do modo seguinte : 1—5—9—3—7—1; 2—6—10—4—8—2 (fig. 360) resultará um polygono estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um decagono regular.

Fig. 360.

Este ultimo polygono estrellado é o resultado da combinação de dois outros de cinco vertices salientes.

Os tres polygonos estrellados têm, cada um, 20 lados eguaes, 10 vertices salientes e 10 reintrantes.

Problema 156. — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um hendecagono regular.

1.° caso. — Diagonaes menores.

Dividamos uma circumferencia em 11 partes eguaes,

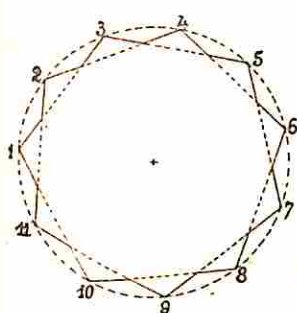



Fig. 361.

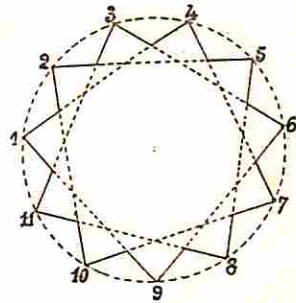



Fig. 362.

unamos seguidamente os pontos de divisão : 1—3—5—7—9—11—2—4—6—8—10—1 (fig. 361).

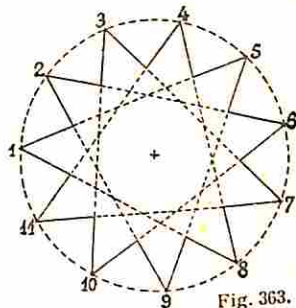
Resulta um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um hendecagono regular.

2.° caso. — Menores diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão : 1—4—7—10—2—5—8—11—3—6—9—1 e obteremos um polygono estrellado formado pelas menores diagonaes médias de um hendecagono regular.

3.° caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos os pontos de divisão como indica a figura 363 : 1—5—9—2—6—10—3—7—11—4—8—1 apparece o polygono estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um hendecagono regular.

Fig. 363.

4.° caso. — Diagonaes maiores.

Tracemos a linha polygonal 1—6—11—5—10—4—9—3—8—2—7—1 (fig. 364).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes maiores de um hendecagono regular.

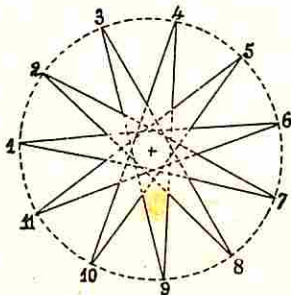



Fig. 364.

Estes quatro ultimos polygonos têm, cada um, 22 lados, 11 vertices salientes e 11 reintrantes.

Problema 157. — Traçar os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um dodecagono regular.

1.° caso. — Diagonaes menores.

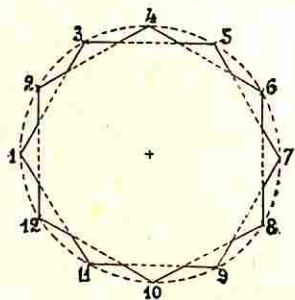
Dividida a circumferencia em 12 partes eguaes, unamos os pontos de divisão do seguinte modo, 1—3—5—7—9—11—1 ; 2—4—6—8—10—12—2 (fig. 365).

O resultado é um polygono regular estrellado formado pelas diagonaes menores de um dodecagono regular.

Fig. 365.

Esse polygono estrellade é tambem o resultado da superposição de dois hexagonos regulares inscriptos num mesmo circulo, de modo que os vertices de um fiquem

no meio dos arcos correspondentes aos lados do outro.

2.° caso. — Menores diagonaes médias.

Liguemos os pontos de divisão pela seguinte fórma .

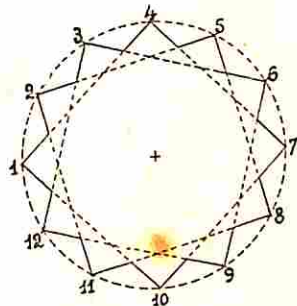



Fig. 366.

1—4—7—10—1, 2—5—8—11—2, 3—6—9—12—3 (fig. 366) e o polygono resultante é formado pelas menores diagonaes médias do dodecagono regular e representa a superposição de tres quadrados eguaes, inscriptos num mesmo circulo.

3.° caso. — Diagonaes médias.

Unamos os pontos de divisão da fórma seguinte :

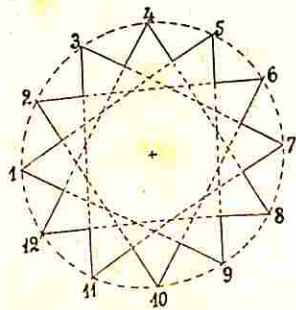



Fig. 367.

1—5—9—1, 2—6—10—2, 3—7—11—3, 4—8—12—4 (fig. 367) e o resultado é um polygono formado pela super-

posição de 4 triangulos equilateros eguaes inscriptos num mesmo circulo.

4.° caso. — Maiores diagonaes médias.

Unidos, finalmente, os pontos de divisão pelo modo indicado na fig. 368: 1—6—11—4—9—2—7—12—5—10—3—8—1, obtemos o polygono regular estrellado formado pelas maiores diagonaes médias de um dodecagono regular.

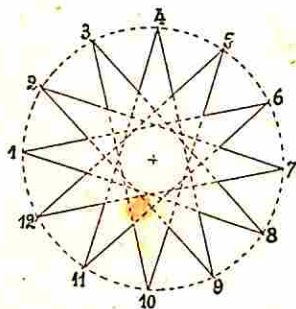



Fig. 368.

EXERCICIOS

1. — Francisco! traça um polygono qualquer.
2. — Mostra os lados, os angulos, os vertices.
3. — Que é perimetro?
4. — Como se chama uma superficie plana limitada por mais de quatro lados?
5. — Dá-me os nomes dos polygonos que conheces.
6. — Que é uma diagonal?
7. — Traça todas as diagonaes de um hexagono, de um pentagono, etc.
8. — Que é um polygono regular?
9. — Que é um polygono irregular?
10. — A quantos angulos rectos é egual a somma dos angulos de um polygono; — de um octogono; — de um hexagono, — de um heptagono; — de um icosagono?

11. — Qual é o triangulo regular?
12. — Qual o quadrilatero regular?
13. — Que quer dizer polygono?
14. — A que é egual o lado de um hexagono regular?
15. — Que é um apothema?
16. — Traça um apothema.
17. — Que é um polygono inscripto?
18. — Que é um polygono circumscripto?
19. — Que é um polygono estrellado?
20. — Que é medir um angulo?
21. — Qual a unidade de medida dos angulos?
22. — Quantos minutos tem um grão?
23. — Quantos segundos tem um grão?
24. — Como se lê 9° 11' 22"?
25. — Escreve: dezenove grãos, doze minutos e seis segundos.
26. — Quantos grãos mede cada angulo de um quadrado? — de um octogono regular? — e de um polygono regular de dezeseis lados?
27. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um quadrado? — e de um octogono regular?
28. — Quantos grãos mede cada angulo de um pentagono regular? — e de um decagono regular? — e de um icosagono regular?
29. — Quantos grãos mede cada angulo de um triangulo equilatero? — de um hexagono regular? — e de um dodecagono regular?
30. — Quantos grãos mede cada angulo de um enneagono regular? — e de um polygono regular de dezoito lados?
31. — Quantos grãos mede cada angulo de um pentadecagono regular?
32. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um pentagono regular? — de um decagono regular? — de um triangulo equilatero? — de um hexagono regular? — de um enneagono regular?
33. — Quantos grãos mede a somma dos angulos de um icosagono regular? — de um dodecagono regular? — e de um pentadecagono regular?
34. — Quantos angulos rectos em 360°? — em 540°? — em 720°? — em 3240°?

35. — Que é um transferidor?
36. — Mostra o limbo; — a linha de fé.
37. — Para que serve o transferidor?
38. — Qual a medida de um angulo central?
39. — Qual a medida de um angulo inscripto?
40. — Qual a medida de um angulo de segmento?
41. — Traça um angulo de 120°, 18°, 62°, 44°, 38°.
42. — Marca sobre uma circumferencia diversos arcos tendo por medida 40°, 60°, 140°, 190°, 6°.
43. — Traça um angulo de segmento e determina o seu valor.
44. — Uma recta encontra outra e fórma dois angulos; um de 65°. Avalia o outro.
45. — Fórma ao redor de um ponto seis angulos eguaes e dize o valor de cada um.
46. — Se dois angulos de um triangulo valem: um 70° e outro 25°, qual será o valor do terceiro angulo?
47. — Dize quaes são os valores dos angulos de um triangulo em que um d'elles mede 75° e o segundo é o dobro do terceiro.
48. — Quantos gráos mede cada angulo da base de um triangulo isosceles cujo angulo do vertice é de 35°?
49. — Quantos gráos mede o angulo do vertice de um triangulo isosceles em que um dos angulos da base é de 49°?
50 — Em um triangulo rectangulo, um dos angulos agudos mede 25°. Avalia os outros dois.
51. — Em circumferencias de $0^{m},06$ de raio, inscreve um quadrado; — um hexagono regular; — um pentagono regular; — um heptagono regular; — um octogono regular.
52. — Em circulos de $0^{m},08$ de raio, inscreve um enneagono regular; — um hendecagono regular.
53. — Em circulos de $0^{m},13$ de diametro, inscreve um dodecagono regular; — um decagono regular; — um pentadecagono regular.
54. — Sem o auxilio do transferidor, fórma um angulo de 15°, 30°, 60°, 45°, 120°.
55. — Idem um angulo de 135°, 150°.
56. — Traça um pentagono regular de $0^{m},06$ de lado.
57. — Idem um heptagono regular de $0^{m},05$ de lado.
58. — Idem um octogono regular de $0^{m},04$ de lado.

59. — Idem um enneagono regular de $0^{m},023$ de lado
60. — Idem um decagono regular de $0^{m},02$ de lado.
61. — Idem um dodecagono regular de $0^{m},03$ de lado
62. — Com uma diagonal menor egual a $0^{m},06$ traça um heptagono regular.
63. — Traça os polygonos estrellados formados pelas diagonaes de um pentagono regular de $0^{m},04$ de lado.
64. — Idem de um hexagono regular de $0^{m},03$ de lado.
65. — Idem de um heptagono regular; — de um octogono regular, ambos de $0^{m},025$ de lado.
66. — Idem de um enneagono regular de $0^{m},03$ de lado; — de um decagono regular de $0^{m},05$ de raio.
67. — Idem de um hendecagono e de um dodecagono regulares, ambos de $0^{m},024$ de lado.
68. — Qual o supplemento de um angulo de 115° 40'?
69. — Traça um pentagono regular cuja diagonal seja egual a 6 cm.
70. — Idem um heptagono regular cuja diagonal menor = 5 cm.
71. — Idem um heptagono regular cuja diagonal maior = 8 cm.
72. — Idem um octogono regular cuja diagonal maior = 8 cm., 5.
73. — Idem um octogono regular cuja diagonal menor = 3 cm.
74. — Idem um octogono regular cuja diagonal média = 6 cm., 5.
75. — Idem um enneagono regular cuja diagonal maior = 8 cm., 3.
76. — Idem um enneagono regular cuja diagonal menor = 72 mm.
77. — Idem um enneagono regular cuja diagonal média = 4 cm., 6.
78. — Idem um decagono regular cuja diagonal menor = 3 cm.
79. — Idem um decagono regular cuja maior diagonal média = 8 cm.
80. — Idem um decagono regular cuja menor diagonal média = 6 cm. 5.

CAPITULO IX

SUMMARIO : **Linhas proporcionaes. — Problemas.**

LINHAS PROPORCIONAES.

O *quociente* que obtemos dividindo entre si os numeros que exprimem as grandezas de duas linhas medidas com a mesma unidade, chama-se *razão* ou *relação*.

Assim, por exemplo, medindo-se duas rectas encontramos uma egual a 0 ,08 e a outra = 0m,04. Dividindo-se 8 por 4 dá 2 que é a *razão* ou *relação* que existe entre as duas rectas.

A egualdade entre duas *razões* chama-se **proporção.**

Exemplo ·

$\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ é uma **proporção** porque estas duas *razões* são eguaes, uma e outra a 2.

Em uma **proporção** o primeiro e o ultimo termos chamam-se *extremos;* o segundo e o terceiro chamam-se *meios*.

Em toda a **proporção** o producto dos *extremos* é egual ao producto dos *meios*.

Exemplo :

$$\frac{5}{10}=\frac{6}{12}$$

portanto

$$5\times12=10\times6=60$$

Este principio permitte o calculo de um dos termos de uma **proporção,** quando os outros tres são conhecidos.

Exemplo :

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{X}$$

Em virtude do principio citado :

$$2\times X=4\times6 \text{ ou } 2X=24$$

d'onde

$$X=\frac{24}{2}=12$$

logo :

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{12}$$

Quatro linhas; quatro numeros ou quatro

quantidades quaesquer são **proporcionaes** quando a primeira contém a segunda ou está contida na segunda o mesmo numero de vezes que a terceira contém ou está contida na quarta.

Exemplo :

12 contém 4 tres vezes, assim como 15 contém 5 tambem tres vezes, isto e :

12 : 4 : : 15 : 5 (doze está para quatro, assim como quinze está para cinco)

ou

$\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$ (doze dividido por quatro é egual a quinze dividido por cinco).

Cada uma das quatro linhas que entram em uma *proporção* chama-se *quarta proporcional.*

Conhecendo-se tres d'estas linhas podemos sempre achar a *quarta.*

Acontece muitas vezes que em uma *proporção* o segundo e o terceiro termos, isto é, os *meios* são eguaes e então denomina-se qualquer d'estas linhas uma *meia proporcional* ás outras duas, e cada uma d'estas

duas outras chama-se uma *terceira proporcional*

Exemplo :

$$\frac{M}{N}=\frac{N}{P}$$

donde

$$M\times P=N\times N \text{ ou } N^2$$

e

$$N=\sqrt{M\times P}$$

N é a *meia* ou *média proporcional* a M e P; M e P são *extremos ;* e M ou P é uma *terceira proporcional* aos *meios* e ao outro *extremo.*

Outro exemplo :

$$\frac{16}{8}=\frac{8}{4}$$

donde

$$16\times 4=8\times 8 \text{ ou } 8^2$$

e

$$8=\sqrt{16\times 4}=\sqrt{64}$$

Problema 158. — Dividir uma recta em partes eguaes.

Seja AB (fig. 369) a recta que queremos dividir em cinco partes eguaes.

A B m n p q r C

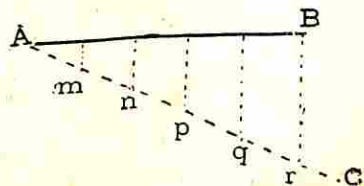



Fig. 369.

Do ponto A tracemos uma recta AC que forme com AB um angulo qualquer. A partir do ponto A e sobre AC

marquemos cinco distancias eguaes Am, mn, np, etc. Unamos o ponto r ao ponto B e pelos pontos q, p, n, m tracemos rectas parallelas á rB, as quaes dividem AB em cinco partes eguaes.

Outra solução. — Seja MN a recta que desejamos dividir em 7 partes eguaes (fig. 370).

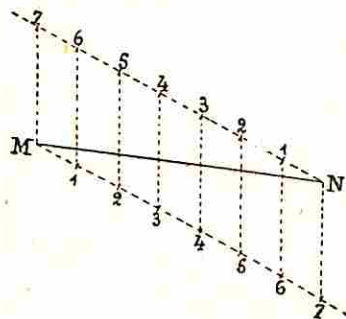
Formemos na extremidade M um angulo qualquer e em N, outro egual a M.

Appliquemos, a partir de M e de N, sobre cada uma das rectas que formam com MN os angulos, sete distancias eguaes entre si e unamos depois M — 7, 1 — 6, 2 — 5, 3 — 4, 4 — 3, 5 — 2, 6 — 1 e 7 — N.

Fig. 370.

Essas parallelas dividem MN em 7 partes eguaes.

Problema 159. — Dividir uma recta em partes proporcionaes a distancias dadas.

Seja AB (fig. 372) a recta que queremos dividir em partes proporcionaes ás tres rectas m, n, e p (fig. 371).

Fig. 371.

Do ponto A tracemos uma recta AC que forme com AB

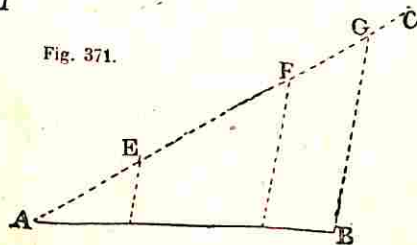



Fig. 372.

um angulo qualquer. Sobre AC e a partir de A marquemos $AE = m$, $EF = n$ e $FG = p$; unamos G a B e dos pontos E e F tracemos parallelas a GB. Estas parallelas dividem a recta AB em partes **proporcionaes** ás distancias m, n e p, porque se duas rectas são cortadas por um numero qualquer de parallelas, as secções correspondentes das duas rectas são proporcionaes.

Problema 160. — Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas.

(Solução graphica):

Sejam A, B e C (fig. 373) as rectas dadas.

Fig. 373.

Tracemos um angulo qualquer V (fig. 374); sobre um dos lados marquemos a distancia $VM = A$ e $VN = B$ e, sobre o outro lado $VP = C$. Unamos o ponto M ao ponto P e do ponto N tracemos uma parallela a MP. A recta VD é a **quarta proporcional** pedida.

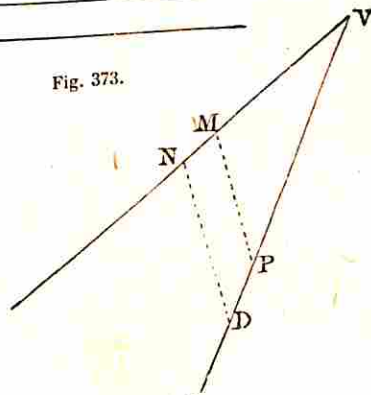



Fig. 374.

Uma recta traçada de um a outro lado de um triangulo e parallelamente ao terceiro, divide os dois primeiros em partes proporcionaes.

(Solução numerica):

Sejam : $A = 2$ centimetros; $B = 4$ centimetros; $C = 3$ centimetros;

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$$

substituamos A, B e C pelos seus valores:

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{X}$$

portanto

$$X=\frac{4\times3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

logo

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$$

Problema 161. — Achar a média proporcional a duas rectas dadas.

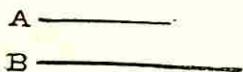
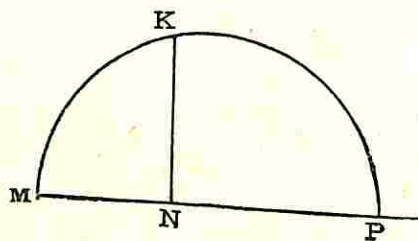
Fig. 375.

Sejam A e B as rectas dadas (fig. 375). Sobre uma recta indefinida marquemos MN (fig. 376) egual a A e NP = B. Sobre MP como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia e pelo ponto N levantemos uma perpendicular. A recta NK é a **média proporcional** pedida.

Fig. 376.

$$MN : NK :: NK : NP$$

porque, uma perpendicular abaixada de um ponto da circumferencia sobre o seu diametro é a média proporcional entre os segmentos d'esse diametro.

Substituindo-se MN e NP pelas rectas A e B, temos

$$A : NK :: NK : B$$

Se A=2 e B=8; NK será egual a 4; porque

$$NK=\sqrt{A\times B}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4.$$

Problema 162. — Dividir uma recta em média e extrema razão (*).

Seja AB a recta dada (fig. 377).

Construamos um triangulo ABC em que $BC=\frac{1}{2}$ de AB; prolonguemos AC.

Do ponto C, como centro e raio egual a CB descrevamos a semi-circumferencia EBF e do ponto A e raio AE tracemos o arco ED.

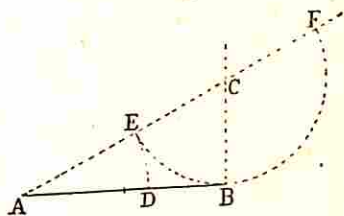



Fig. 377.

O ponto D divide a recta AB em média e extrema razão. AB : AD :: AD : DB.

Problema 163. — Construir um triangulo de perimetro egual a uma recta dada, sendo seus lados proporcionaes a tres medidas dadas.

Seja AB a recta egual ao perimetro (fig. 378) e as tres

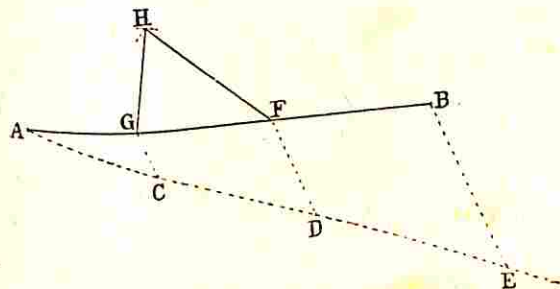



Fig. 378.

medidas, respectivamente eguaes a $0^m,017$; $0^m,02$ e $0^m,025$.

(*) Uma recta está dividida em média e extrema razão, quando o maior segmento é média proporcional entre a recta inteira e o menor segmento.

Formemos com a recta AB um angulo qualquer A e appliquemos $AC = 0^m,017$, $CD = 0^m,02$ e $DE = 0^m,025$.

Unamos o ponto B ao ponto E e de C e D tracemos parallelas a BE.

Sobre GF construamos o triangulo GFH cujos lados $GH = GA$ e $FH = FB$.

O angulo BAE denomina-se *angulo de reducção.*

EXERCICIOS

1. — Dinah ! que é razão ? — dá exemplos.
2. — Como se chama a egualdade de duas razões ?
3. — Exemplo.
4. — Como se chamam o primeiro e o ultimo termos de uma proporção ?
5. — O segundo ? — e o terceiro ?
6. — Em uma proporção a que é egual o producto dos extremos ?
7. — Exemplo.
8. — Que é uma quarta proporcional ?
9. — Que é uma média proporcional ?
10. — Que é uma terceira proporcional ?
11. — Exemplo.
12. — Traça quatro rectas taes que formem a proporção 2:6::3:9 ; sabendo-se que a primeira é egual a 3 centimetros.
13. — Divide uma recta de $0^m,045$ em tres partes proporcionaes a tres rectas de $0^m,012$; $0^m,025$ e $0^m,034$.
14. — Divide uma recta de 72 centimetros em cinco partes eguaes.
15. — Divide uma recta de $0^m,086$ em partes proporcionaes a $0^m,03$; $0^m,04$ e $0^m,06$.
16. — Qual a 4.ª proporcional a tres rectas de, respectivamente, $0^m,024$; $0^m,032$ e $0^m,05$?

17. — Qual a média proporcional de duas rectas : uma de $0^m,05$ e outra de $0^m,03$?
18. — Divide uma recta de $0^m,10$ em média e extrema razão.
19. — Qual o comprimento da média proporcional entre duas rectas, uma de $0^m,20$ e outra de $0^m,45$?
20. — Qual o comprimento da quarta proporcional a tres rectas de $0^m,10$; $0^m,20$, $0^m,50$?

Aluysio Moreira.

CAPITULO X

SUMMARIO : **Polygonos semelhantes. — Escalas. — Problemas.**

Quando dois **polygonos** têm os angulos

POLYGONOS SEMELHANTES.

eguaes e os lados homologos proporcionaes, são **semelhantes**, (fig. 379).

São *homologos* os lados adjacentes aos angulos eguaes.

Uma recta, parallela a um dos lados de um triangulo, determina um triangulo semelhante ao primeiro.

Fig. 379. — Polygonos semelhantes.

Os vertices dos angulos eguaes são *homologos*.

Dous ou mais **polygonos semelhantes** têm, cada um, o mesmo numero de lados e de angulos.

Todos os triangulos que têm seus angulos correspondentes eguaes, são **semelhantes.**

Todos os quadrados são **semelhantes,** e do mesmo modo o são todos os polygonos regulares do mesmo numero de lados.

Os rectangulos só são **semelhantes** quando os lados correspondentes são proporcionaes.

Convém não confundir *semelhante* com *egual;* duas figuras eguaes, superpostas, coincidem em todos os seus pontos; ao passo que semelhantes, não coincidem.

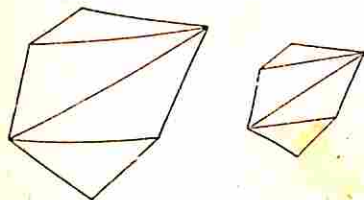



Fig. 380.

Dois **polygonos semelhantes** podem ser decompostos em um mesmo numero de triangulos semelhantes (fig. 380) e semelhantemente dispostos.

Copiar um modêlo do tamanho natural é reproduzil-o com egual fórma, de modo que o desenho, em todos os seus detalhes, fique

ESCALAS.

exactamente egual ao modêlo; ***augmentar*** ou ***diminuir*** um modêlo é reproduzil-o maior ou menor de modo que todos os seus detalhes sejam proporcionalmente traçados.

Uma reducção ou diminuição póde ser feita proporcionalmente ás linhas ou ás áreas; no primeiro caso diz-se *reducção linear* e no ultimo *superficial*.

Para a reducção, usa-se geralmente da **escala** que é a relação que existe entre o tamanho de um objecto ou de um modêlo, que se deseja reproduzir e o desenho d'esse objecto ou modêlo.

Póde-se tambem dizer que, **escala** é a relação que existe entre as dimensões reaes e as do desenho.

Esta relação exprime-se em fórma de fracção ordinaria em que o numerador é a unidade e o denominador indica de quantas vezes está reduzido o modêlo.

Assim diz-se que um desenho está na **escala** de um para vinte ($1:20$; $\frac{1}{20}$; $1/20$) quando elle representa a vigesima parte do natural. Geralmente adoptamos o metro como unidade de medida e, se uma linha de um desenho qualquer medir 4 centimetros e a sua correspondente no natural ou no modêlo fôr 4 metros, a **escala** usada n'esse desenho será de

um para cem ($1:100$; $\frac{1}{100}$ ou $1/100$) porque 4 centimetros é a centesima parte de 4 metros.

A **escala** ***de reducção*** é formada por duas rectas parallelas, divididas em partes eguaes por meio de perpendiculares communs.

Cada uma d'essas partes representa a unidade de medida (geralmente o metro) em uma dada relação.

Para desenharmos um modêlo na proporção de $1:10$, por exemplo, teriamos que construir uma **escala** em que cada uma das divisões representasse a decima parte da medida adoptada e, se essa medida fosse o metro as divisões que correspondessem á unidade, em nossa escala, seriam eguaes á decima parte do metro ou o decimetro e cada uma das dez primeiras subdivisões corresponderia a um decimetro.

Na figura 381 (Escala de $1:10$) AB que é egual a um decimetro, representa um metro;

A e c B
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

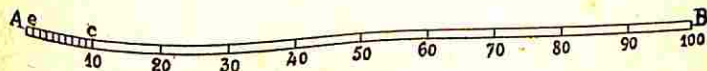



Fig. 381.

AC que é egual a um centimetro, representa um decimetro e A*e* que é um millimetro, representa um centimetro.

Na figura 382 (Escala de 1:20) as dez primeiras divisões reunidas que são eguaes a cinco centimetros representam um metro, porque cinco centimetros é a vigesima parte do metro; cada uma das dez divisões que é egual a cinco millimetros representa um decimetro e, finalmente divididos cinco millimetros em dez partes eguaes, cada uma representará nessa escala, um centimetro.

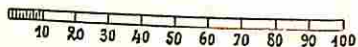



Fig. 382.

As **escalas** *metricas de proporção,* mais usadas, são:

Escala	Medida real	Medida graphica
1:5	1 metro	$0^{m},20$
1:10		$0^{m},10$
1.20		$0^{m},05$
1:25		$0^{m},04$
1:50		$0^{m},02$
1:100		$0^{m},01$

Isto é, na **escala** de 1 : 5, um metro é egual a $0^{m},20$; na de 1 : 10, $1^{m},0 = 0^{m},10$, etc.

Serve a **escala** para se poder traçar um desenho cujas linhas estejam em uma mesma relação com as correspondentes no modêlo re-

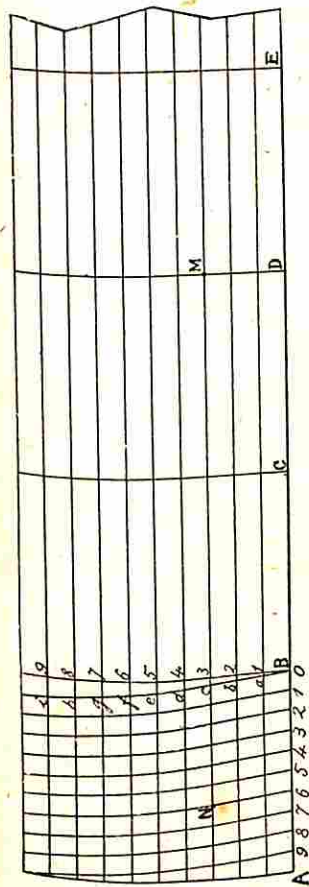
presentado e, para julgar por um desenho, das dimensões exactas e reaes do modêlo ou objecto representado nesse desenho.

Fig. 383.

A **escala** *decimal* ou *transversal* permitte divisões muito pequenas as quaes não poderiamos obter na **escala** commum.

Sua construcção é baseada na theoria dos triangulos semelhantes cujos lados homologos são proporcionaes.

Problema 164. — Construir uma escala decimal.

Tracemos uma recta e marquemos, a partir de um ponto qualquer diversas medidas, AB, BC, CD, DE, etc., eguaes entre si e cada uma correspondente á unidade de medida (fig. 383).

Dos pontos A, B, C, D, E levantemos perpendiculares á recta anteriormente traçada.

Sobre a perpendicular A appliquemos dez vezes uma mesma medida arbitraria e pelos pontos de divisão tracemos rectas parallelas a A E. Dividamos A B em dez partes eguaes e tiremos pelos pontos de divisão, obliquas parallelas a F *9*, como indica a fig. 383.

O ponto B é o zero da escala; as distancias crescentes *a1*, *b2*, *c3*, etc., exprimem 1, 2, 3, etc., centenas; as partes eguaes em que está dividida A B são as dezenas e as distancias A B, B C, C D, etc., são as unidades.

Applicações. — Para marcar 130 unidades, tomemos a distancia C 3 em linha horisontal,

Para ter 263 unidades tomemos a distancia M N, porque $MN = M3 + 3c + cN$ ou $200 + 3 + 60 = 263$.

Problema 165. — Construir sobre uma recta dada um triangulo semelhante a um outro.

Seja A B C o triangulo dado (fig. 384).

Tracemos uma recta D E (fig. 385) proporcional a C B.

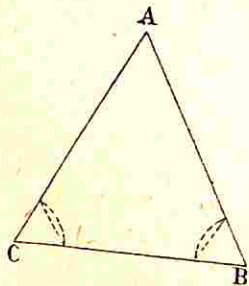



Fig. 384.

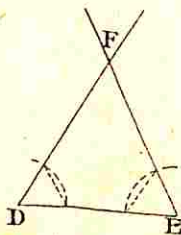



Fig. 385.

Façamos no ponto D um angulo = C e no ponto E um outro = B.

Os triangulos C A B e D F E têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes : são semelhantes.

Problema 166. — Construir um polygono semelhante a um outro. Seja A B C D E o polygono dado (fig. 386).

Decomponhamol-o nos triangulos A B E, B D E e B C D.

Tracemos uma recta M N (fig. 387) proporcional a E D,

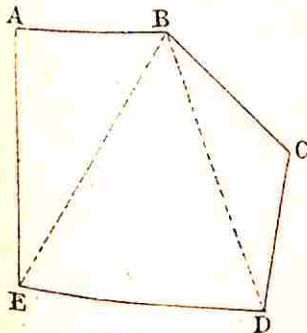



Fig. 386.

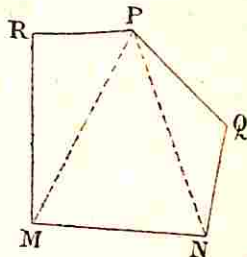



Fig. 387.

sobre a qual façamos um triangulo P N M semelhante a B D E; sobre o lado P N façamos um triangulo P Q N semelhante a B C D, e sobre P M um triangulo P M R semelhante a B E A. Os **polygonos** R P Q N M e A B C D E **são semelhantes**, porque têm os angulos eguaes e os lados homologos proporcionaes.

Problema 167. — Construir um rectangulo semelhante a um outro, de modo que seus lados sejam menores $\frac{1}{7}$ dos lados d'esse outro, isto é, que seus lados estejam para os d'esse outro como 6 : 7.

A B C D é o rectangulo conhecido (fig. 388).

Tiremos a diagonal A D e dividamos o lado A B em 7 partes eguaes.

Pelo ponto 6 levantemos uma perpendicular á recta A B até determinar o ponto M na diagonal A D.

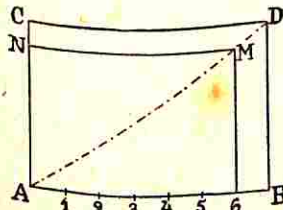



Fig. 388.

Do ponto M tracemos M N parallela a C D. A 6 N M é o rectangulo pedido; seus lados estão na seguinte proporção: A 6 : A B : : 6 M : B D.

Problema 168. — Dado um rectangulo, construir, por meio do angulo de reducção, um outro cujos lados estejam para os do primeiro como 3 : 5.

Seja A B C D o rectangulo dado (fig. 389),

Construamos um triangulo isosceles F E V de modo que a base e o lado estejam na proporção de 3 : 5 (fig. 390).

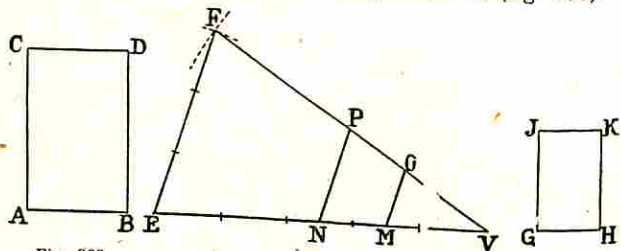



Fig. 389.

Fig. 390.

Fig. 391.

Transportemos em V N a medida do lado A C e em V M a do lado A B.

Pelos pontos N e M tracemos rectas parallelas á base E F e construamos, com as rectas NP e MO, o rectangulo GHJK (fig. 391) cujos lados estarão para os de A B C D como 3 : 5.

Problema 169. — Construir um polygono irregular, semelhante a um outro, de modo que seus lados estejam para os correspondentes do outro, como 6 : 4.

Seja M N O P Q R o polygono irregular (fig. 392).

Dividamos M N em 4 partes eguaes e prolonguemos M R e M N.

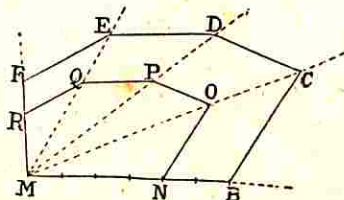



Fig. 392.

Appliquemos em N B duas vezes a medida que dividiu MN, isto é, $\frac{2}{4}$ de M N, e teremos M B : M N : : 6 : 4.

Do vertice M tiremos todas as diagonaes do polygono dado, prolongando-as.

Tracemos B C, C D, D E, E F respectivamente parallelas a N O, O P, P Q, Q R.

O polygono M B C D E F é semelhante ao polygono dado, e seus lados estão para os do primeiro como 6 : 4.

EXERCICIOS

1. — Clarisse! que são polygonos semelhantes?
2. — Que nome têm os lados adjacentes aos angulos eguaes?
3. — Mostra dois lados homologos.
4. — Quando são semelhantes dois triangulos?
5. — Quaes os quadrilateros que são semelhantes?
6. — Que é preciso para que dois ou mais polygonos regulares sejam semelhantes?
7. — Que é preciso para que dois rectangulos sejam semelhantes?
8. — Semelhança e egualdade são a mesma cousa?
9. — Não será a egualdade um caso especial de semelhança?
10. — Dois polygonos semelhantes poderão ser divididos em um mesmo numero de triangulos semelhantes?
11. — Traça um triangulo semelhante a um outro triangulo dado.
12. — Traça um polygono semelhante a um outro polygono dado.
13. — Sendo 0m,60 e 0m,20 as medidas dos lados de dois quadrados, que são estes quadrados entre si?
14. — Porque?
15. — Traça um rectangulo semelhante a um outro e cujos lados estejam na relação de 4 : 7. — Idem, na de 8 : 5.
16. — Faze um triangulo equilatero de 0m,05 de lado e depois um outro, cujo perimetro seja a metade do do primeiro.

17. — Faze um quadrado de 0ᵐ,03 de lado e depois um outro cujo perimetro seja o dobro do do primeiro.

18. — Faze um hexagono cujo perimetro seja egual a $\frac{2}{5}$ do perimetro de um outro de 0ᵐ,032 de lado.

19. — Faze um quadrado cujo perimetro seja egual a uma vez mais $\frac{1}{5}$ do perimetro de um outro de 0ᵐ,035 de lado.

20. — Traça um octogono regular e depois um outro que lhe seja semelhante e tenha um perimetro duplo do primeiro.

21. — Idem, idem cujo perimetro seja egual a $\frac{1}{3}$ do do primeiro.

22. — Faze um rectangulo cujos lados adjacentes sejam 0ᵐ,025 e 0ᵐ,052 e depois um outro semelhante cujo perimetro seja egual a 0ᵐ,120.

23. — Faze um losango cujas diagonaes meçam, uma 0ᵐ,03 e a outra 0ᵐ,045 e depois um segundo semelhante ao primeiro e cujo perimetro seja egual a $\frac{7}{5}$ do perimetro do primeiro.

24. — Faze um losango de 0ᵐ,04 de lado, em que um dos angulos agudos seja de 38°; depois um outro semelhante, cuja diagonal maior seja egual a $\frac{8}{7}$ da do primeiro.

25. — Traça um triangulo equilatero inscripto em um circulo de raio = 0ᵐ,028 e outro em um circulo cuja circumferencia circumscreva um quadrado de 0ᵐ,04 de lado.

26. — Qual a relação entre os perimetros de dois triangulos equilateros tendo para lados: o primeiro 0ᵐ,02 e o segundo 0ᵐ,07?

27. — Qual a relação entre os perimetros de dois quadrados tendo para lados 0ᵐ,04 e 0ᵐ,05? — idem 0ᵐ,08 e 0ᵐ,05? — idem 10ᵐ e 52ᵐ?

28. — Qual a relação entre os perimetros de dois pentagonos regulares inscriptos em circulos de: um 0ᵐ,03 de raio e outro 0ᵐ,04 de raio?

29. — Um rectangulo tem por base 15ᴷᵐ e por altura 4ᴷᵐ,5; qual será o perimetro de um outro semelhante, cujos lados meçam $\frac{1}{6}$ dos do primeiro?

30. — Quaes serão a base e a altura de um rectangulo semelhante a um outro de 0ᵐ,054 × 0ᵐ,032, tendo por perimetro $\frac{5}{4}$ do perimetro do primeiro?

31. — Um heptagono regular está inscripto em um circulo de 0ᵐ,02 de raio; qual será o raio do circulo circumscripto a um outro heptagono semelhante e de duplo perimetro?

32. — Um quadrilatero tem por medida dos lados, successivamente, 0ᵐ,02; 0ᵐ,03; 0ᵐ,05 e 0ᵐ,025 e para medida do angulo formado pelo primeiro e segundo lados 110°: traça um outro cujo primeiro lado esteja na relação de 7:4.

33. — Que é copiar um modêlo?

34. — Que é augmentar um modêlo? — diminuir?

35. — Quando ha reducção linear? — superficial?

36. — Que é escala?

37. — Como se lê 1:10? — 1:40? — 1:100? — 1:10000?

38. — Como é formada a escala de reducção?

39. — Qual é a medida geralmente empregada?

40. — Na escala de 1:10, mostra-me 4 centimetros; 63 millimetros; 6 decimetros.

41. — Representa-me 6 metros na escala de 1:20; idem na de 1:10; idem na de 1:5.

42. — Traça uma recta e dize-me que representa na escala de 1:25; idem na de 1:50.

43. — Para que serve a escala?

44. — Faze uma escala decimal representando o metro por 0ᵐ,05; idem representando o metro por 0ᵐ,10.

45. — Tanto numa como noutra, mostra os decimetros e os centimetros.

46. — Sobre uma recta de 0ᵐ,10 constroe uma escala que represente, por 6 centimetros, uma dimensão de 12 metros.

47. — Constroe a escala de 1:20 e traça nessa escala um rectangulo cujos lados adjacentes meçam 0ᵐ,82 e 0ᵐ,63.

48. — Constroe a escala de 1:10 e nessa escala faze um quadrado cujo lado meça 0ᵐ,92.

49. — Faze um quadrado de 0ᵐ,90 de lado na escala de 1:10.

50. — Faze um pentagono regular inscripto em um circulo de raio egual a 0ᵐ,64 na escala de 1:10; — idem na de 1:20.

CAPITULO XI

SUMMARIO : **Relação entre a circumferencia e o diametro. — Problemas.**

Reduzir uma circumferencia ou um arco a uma linha recta é rectifical-os.

RELAÇÃO ENTRE A CIRCUMFERENCIA E O DIAMETRO.

Se pudessemos applicar sobre uma circumferencia um fio de linha de modo que as suas extremidades se reunissem em um ponto, e depois collocassemos este fio em linha recta, tinhamos materialmente rectificado esta circumferencia; porém como este processo é inexequivel, os geometras substituiram-no pelo calculo.

A relação que existe entre a **circumferencia** e o **diametro** é uma quantidade constante.

Convencionou-se designar pela lettra R o raio de uma circumferencia.

Designemos por C e c duas circumferencias e por D e d os respectivos diametros.

Duas **circumferencias** *são proporcionaes* entre si, como *seus* **raios** *ou seus* **diametros;** portanto

$$C : c :: D : d$$

mudemos os meios de logar

$$C : D :: c : d$$

d'onde

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$$

isto é, o quociente da primeira **circumferencia** por seu diametro é egual ao quociente da segunda **circumferencia** por seu diametro.

Este quociente é ordinariamente designado pela lettra grega π (pi).

$$\frac{C}{D} = \pi$$

Esta relação não se póde exprimir exactamente.

Na prática, e geralmente, empregamos a expressão 3,1416, isto é: a circumferencia contém 3 vezes o diametro mais 1416 decimos-millesimos d'este diametro.

Obtem-se o comprimento de uma **circumferencia** cujo raio ou diametro é conhecido, multiplicando-se seu diametro pela relação 3,1416 (π)

$$C = \pi \times D = 3{,}1416 \times D$$

Problema 170. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é egual a 6 metros?

A circumferencia é egual a $\pi \times D$; porém D é egual a 2 R (porque o diametro = dois raios) logo:

$$\pi \times 2R = 3{,}1416 \times 12 = 37^m{,}6992$$

Problema 171. — Qual a circumferencia que tem para diametro 16 metros?

A circumferencia é egual a $\pi \times D$; porém $D = 16^m$ portanto $3{,}1416 \times 16 = 50^m{,}2656$.

O **diametro** de um circulo cuja **circumferencia** se conhece é egual ao quociente da divisão d'essa **circumferencia** pela relação 3,1416, isto é:

$$D = \frac{C}{3{,}1416}$$

Problema 172. — Qual o diametro de um circulo cuja circumferencia é egual a $37^m{,}6992$?

Sendo o diametro $= \frac{C}{3{,}1416}$ e substituindo-se C pelo seu valor, temos:

$$\frac{37{,}6992}{3{,}1416} = 12^m$$

O comprimento de um *arco* cujo numero de gráos se conhece é egual ao producto da **circumferencia,** de que o *arco* faz parte, pela relação entre o numero de gráos d'esse *arco* e 360°, isto é:

$$\pi \times D \times \frac{\text{numero de gráos do arco}}{360^\circ}$$

ou

$$\frac{\pi \times D \times \text{numero de gráos do arco}}{360^\circ}$$

Problema 173. — Qual o comprimento de um arco de 50° numa circumferencia de 12 metros de diametro?

Sendo a circumferencia egual a

$$\pi \times D = \pi \times 12$$

O arco será egual a

$$\frac{\pi \times 12 \times 50^\circ}{360^\circ} = \frac{3{,}1416 \times 12 \times 50}{360} = 5^m{,}2360$$

Problema 174. — Qual é o numero de gráos de um arco de 6 metros, numa circumferencia de 15 metros de raio?

Sendo a circumferencia egual a

$$3{,}1416 \times 30 = 94^m{,}2480$$

o numero de gráos do arco será egual a

$$360 \times \frac{6}{94{,}2480} = \frac{2160}{94{,}2480} = 22^\circ 54'$$

EXERCICIOS

1. — Maria! que é rectificar um arco?
2. — Como se poderia rectificar uma curva se fosse exacta esta rectificação?
3. — Qual a relação que existe entre o diametro e a circumferencia?
4. — Como geralmente exprimimos esta relação?
5. — A circumferencia a que é egual?
6. — Qual é a medida do diametro de uma circumferencia conhecida?
7. — A que é egual o raio de uma circumferencia conhecida?
8. — A que é egual o comprimento de um arco cujo numero de gráos é conhecido?
9. — Como se póde determinar o numero de gráos de um arco cujo comprimento é conhecido?
10. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo diametro é egual a 12 centimetros?
11. — Qual o comprimento de uma circumferencia cujo raio é egual a 8 centimetros?
12. — Qual a circumferencia que tem para diametro 40 metros?
13. — Qual a circumferencia que tem 32 metros de raio?
14. — Que comprimento tem a circumferencia de um nickel de 200 réis, sabendo-se que o diametro mede $0^{m},032$?
15. — Qual a circumferencia que tem para diametro 120^{m}?
16. — Idem como raio 170^{km}?
17. — Quaes as circumferencias que têm para diametro $12^{m},5$; $6^{m},40$; 16^{m}; e $1^{m},80$?
18. — Quaes as circumferencias que têm como raio $0^{m},085$; $0^{m},90$; 30^{m}; e $0^{m},6$?
19. — Em uma circumferencia de 40 centimetros de raio, quaes são os comprimentos dos arcos de 60°, 30°, 120° e 150°?

20. — Em uma circumferencia de 50 centimetros de raio, quaes são os numeros de gráos dos arcos de 30 millimetros? — de $0^{m},025$? — de $0^{m},080$?
21. — Quaes os diametros das circumferencias que medem $206^{m},25$; 100^{m}; 60^{m}; $0^{m},06$; e 1000^{m} de comprimento?
22. — A roda de um carrinho de mão tem $0^{m},60$ de diametro. Qual a distancia percorrida pelo carrinho quando, conduzido, a roda tiver feito 60 voltas?

CAPITULO XII

SUMMARIO : **Área dos polygonos. — Área das figuras circulares. — Figuras equivalentes. — Problemas.**

Medir ou avaliar uma superficie é determinar quantas vezes ella contém uma outra superficie tomada para unidade de medida.

ÁREA DOS POLYGONOS.

O numero de vezes que uma unidade de superficie está contida em qualquer superficie, seguida do nome da unidade, chama-se **área** (*).

Ordinariamente a unidade de superficie é um quadrado, cujo lado póde ser arbitrario ; porém geralmente é um metro quadrado, ou

(*) É necessario que não confundamos **área** com *superficie*. Superficie exprime a idéa de uma extensão absoluta e área exprime a idéa de uma extensão relativa. Assim dizemos : a superficie de um campo illimitado e a área de um quadrado.

por outra, um quadrado cujo lado mede um metro de comprimento.

As divisões do *metro quadrado* são :

O *decimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a decima parte do metro;

O *centimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a centesima parte do metro ;

O *millimetro quadrado*, isto é, um quadrado cujo lado mede a millesima parte do metro.

ÁREA DO QUADRADO

Tomemos um quadrado A B C D (fig. 393); appliquemos o metro sobre AB e AC a partir do ponto A : obteremos os pontos de divisão 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, admittindo que os lados AB e AC tenham, cada um, uma medida exacta de 5 metros.

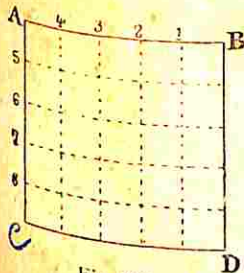



Fig. 393.

Pelos pontos 1, 2, 3 e 4 tracemos parallelas a AC e dos pontos 5, 6, 7, 8 parallelas a AB. O quadrado acha-se dividido em 25 quadrados

eguaes (tendo, cada um, um metro de lado) isto é, em 25 metros quadrados.

Neste, como em qualquer caso, podemos sempre fazer esta construcção ou simplesmente multiplicar por si mesmo o numero que representa o comprimento do lado

Se o lado de um quadrado contém um certo numero de metros e subdivisões do metro, empregamos o mesmo processo.

Assim, por exemplo, se o lado tem de comprimento $5^m,26$ isto equivale dizer que o comprimento é de quinhentos e vinte e seis centimetros e faremos a decomposição precedente tomando para unidade o centimetro.

Para se avaliar a **área** de um quadrado basta portanto multiplicar por si mesmo o numero que representa o comprimento do lado; o que nos dá a ***fórmula*** : (*)

$$\text{Área} = B^2$$

Problema 175. — Qual a área de um quadrado de $12^m,5$ de lado?

$$\text{Área} = \overline{12,5}^2 = 12,5 \times 12,5 = 156^{m2},25.$$

Da formula : Área = B^2 deduz-se

$$B = \sqrt{\text{Área}}$$

(*) Fórmula é a expressão de uma regra geral que resolve muitas questões.

isto é, o comprimento de um lado é egual á raiz quadrada da **área**.

Problema 176. — Qual o comprimento do lado de um quadrado, cuja área é egual a $46^{m2},24$?

O lado é egual a $\sqrt{46,24} = 6^m,8$.

A **área** do quadrado inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, obtem-se multiplicando o quadrado d'esse raio pelo numero 2.

$$\text{Área} = 2\,R^2$$

Problema 177. — Qual a área de um quadrado inscripto em um circulo cujo raio é egual $0^m,16$?

$$\text{Área} = 2 \times \overline{0,16}^2 = 2 \times 0,0256 = 0^{m2},0512.$$

O *lado* do quadrado inscripto em um circulo de raio dado é egual ao producto d'esse raio pela $\sqrt{2}$, isto é, por 1,414 :

$$\text{Lado} = R\sqrt{2} = R \times 1,414.$$

Problema 178. — Qual o lado de um quadrado inscripto em um circulo de raio egual a $15^m,80$?

$$\text{Lado} = 15.80 \times 1,414 = 22^m,3412.$$

Para obtermos o *apothema* do quadrado inscripto em um circulo de raio conhecido bastará dividirmos o lado por 2 :

$$Ap = \frac{1}{2} R\sqrt{2} = \frac{\text{Lado}}{2}$$

Problema 179. — Que comprimento tem o apothema de um quadrado inscripto em um circulo cujo raio mede $30^m,42$?

$$Ap = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = \frac{30,42 \times 1.414}{2} = 15,21 \times 1,414 = 21^m,50694$$

ÁREA DO RECTANGULO

Ao rectangulo applicamos o mesmo processo feito com o quadrado.

O lado A B (fig. 394) contém cinco metros de comprimento e o lado A C quatro metros. Como vemos na fig. 394, o rectangulo ABCD contém $5 \times 4 = 20$ metros quadrados. Portanto para avaliarmos a **área** de um rectangulo multiplicamos o numero que representa o lado maior pelo que representa o lado menor ou a *base* pela *altura*, o que nos fornece a fórmula:

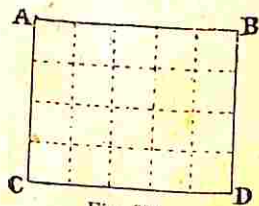
A B C D

Fig. 394.

$$\text{Área} = B \times A$$

Problema 180. — Qual a área de um rectangulo de $5^m,12$ de comprimento e $3^m,05$ de largura?

$$\text{Área} = B \times A = 5,12 \times 3,05 = 15^{m2},6160.$$

Se conhecemos a *base* e a **área** e desconhecemos a *altura*, applicamos a seguinte fórmula:

$$\text{Altura} = \frac{\text{Área}}{B}$$

isto é, a *altura* é egual ao quociente da *área* pela *base*.

Problema 181. — Qual a altura de um rectangulo cuja área é egual a $32^{km},30$ e a base $8^{km},5$?

$$\text{Altura} = \frac{\text{Área}}{B} = \frac{32,30}{8,5} = 3^{km},8$$

Finalmente, se é conhecida a **área** e a *altura* e desconhecida a *base*, esta é egual:

$$\text{Base} = \frac{\text{Área}}{A}$$

A *base* é egual ao quociente da **área** pela *altura*.

Problema 182. — A altura de um muro é egual a $2^m,80$; a área mede $197^{m2},40$: qual a sua extensão?

A extensão ou comprimento ou ainda a

$$\text{Base} = \frac{197,40}{2,80} = 70^m,5$$

ÁREA DO PARALLELOGRAMMO

A **área** do parallelogrammo é facilmente transformada na do rectangulo; assim por exemplo:

Do ponto A (fig. 395) abaixemos a perpendicular AE commum ás parallelas AB e CD. AE é a altura do parallelogrammo.

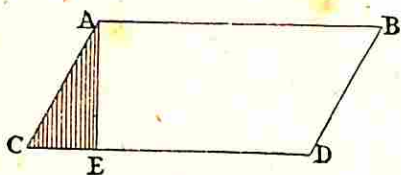



Fig. 395.

Destaquemos o triangulo AEC (fig. 396) e transportemol-o para o outro lado do parallelogrammo, que se acha d'este modo transformado em um rectangulo equivalente ABEE' (fig. 397). A altura AE do parallelogrammo tornou-se a altura do rectangulo e AB é ao mesmo tempo base de um e de outro quadrilatero.

Fig. 396.

Fig. 397.

Logo o mesmo producto $AB \times AE$ é o valor da **área** do parallelogrammo e da do rectangulo. A **área** do parallelogrammo é portanto egual ao producto da *base* pela *altura*.

$$\text{Área} = B \times A$$

Problema 183. — A base de um campo da fórma de um parallelogrammo mede $468^m,80$ e a altura $125^m,90$: qual a área d'esse campo?

$$\text{Área} = 468,80 \times 125,90 = 59021^{m2},92$$

ÁREA DO TRIANGULO

Da **área** do rectangulo vamos tambem deduzir a do triangulo. Do ponto (fig. 398) abaixemos a perpendicular BM sobre AC. BM é a altura do triangulo ABC e divide este triangulo em dois outros BMA e BMC, ambos rectangulos em M.

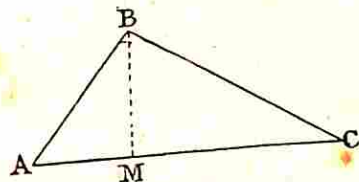



Fig. 398.

Tracemos as rectas AE e CF (fig. 399) perpendiculares á base AC do triangulo ABC e a parallela EF pelo ponto B.

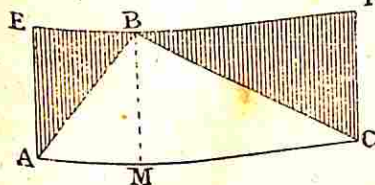



Fig. 399.

O rectangulo AEFC é o dobro do triangulo ABC porque o triangulo AEB = BMA e o triangulo BMC = CFB.

O rectangulo tem por medida $AC \times AE$ ou

M B; logo o triangulo tem por medida a metade d'este mesmo producto, e portanto :

$$\text{Área} = \frac{B \times A}{2}$$

isto é, a **área** do triangulo é egual á *metade* do producto da ***base*** pela ***altura***.

Problema 184. — Seja a *base* de um triangulo egual a 2 centimetros e a *altura* egual a 3 centimetros; pede-se a área. Substituamos, na fórmula, B e A pelos seus valores :

$$\text{Área} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \text{ centimetros quadrados.}$$

Se conhecemos a **área** e a ***altura*** de um triangulo e desconhecemos a ***base***, a fórmula que resolve este problema é :

$$\text{Base} = \frac{2\,\text{Área}}{A}$$

isto é, a ***base*** é egual ao dobro da **área** dividido pela ***altura***.

Problema 185. — Qual é a base de um triangulo cuja área mede $247^{m2},5075$ e a altura $15^{m},25$?

$$\text{Base} = \frac{2 \times 247{,}5075}{15{,}25} = 32^{m},46$$

Conhecida a **área** e a ***base*** e desconhecida a ***altura***, resolvemos o problema applicando a fórmula :

$$\text{Altura} = \frac{2\,\text{Área}}{B}$$

isto é a ***altura*** é egual ao dobro da **área** dividido pela ***base***.

Problema 186. — Pede-se a altura de um triangulo cuja área mede 175^{m2} e a base 25 metros.

$$\text{Altura} = \frac{2 \times 175}{25} = 14 \text{ metros.}$$

Conhecendo-se os tres ***lados*** de um triangulo, procura-se a semi-somma dos lados e d'este resultado diminue-se cada lado separadamente; depois extráe-se a raiz quadrada do producto da semi-somma pelos tres restos; ter-se-á assim a **área** do triangulo.

Problema 187. — Qual a área de um triangulo cujos lados medem respectivamente $0^{m},06$; $0^{m},08$ e $0^{m},10$?

Sommando-se os lados e dividindo-se o total por 2 :

$$\frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

diminuindo-se separadamente de 12, as medidas dos lados :

$$12 - 6 = 6$$
$$12 - 8 = 4$$
$$12 - 10 = 2$$

e extraindo-se a raiz quadrada do producto da semi-somma pelos tres restos, dá :

$$\sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = 0^{m2},0024$$

A **área** do triangulo equilatero é egual ao producto do quadrado de seu lado pelo numero constante 0,433.

O numero constante é o resultado da divisão da $\sqrt{3}$ por 4:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1{,}732}{4}=0{,}433$$

Portanto a área do triangulo é egual a

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=0{,}433\times a^2$$

Problema 188. — O lado de um triangulo equilatero é egual a $6^m{,}80$; pede-se a sua área.

Substituindo se na fórmula o valor do lado:

$$0{,}433\times\overline{6{,}80}^2=20^{m2}{,}021920$$

Sendo o triangulo equilatero inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, a sua **área** é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 1,299, isto é, $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

$$\text{Área}=R^2\times\frac{3}{4}\sqrt{3}\text{ ou }\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}=R^2\times1{,}299$$

Problema 189. — Qual a área de um triangulo equilatero inscripto num circulo de 6 centimetros de raio?

$$\text{Área}=6^2\times1{,}299=36\times1{,}299=46^{cm2}{,}7640$$

O *lado* de um triangulo equilatero inscripto num circulo, cujo raio é conhecido, é egual ao producto d'esse raio pelo numero constante 1,732, isto é, pela raiz quadrada de 3

$$\text{Lado}=R\sqrt{3}=R\times1{,}732$$

Problema 190. — Qual o comprimento do lado de um triangulo equilatero inscripto num circulo de raio egual a 8 metros?

$$L=8\times1{,}732=13^m{,}856$$

A *altura* do mesmo triangulo é egual aos $\frac{3}{2}$ do raio:

$$A=\frac{3}{2}R.$$

Problema 191. — Um triangulo equilatero é inscripto em um circulo de raio egual a 12 metros. Pede-se a altura d'esse triangulo.

$$A=\frac{3}{2}12=18\text{ metros.}$$

O *apothema* do mesmo triangulo é egual á metade do raio:

$$Ap=\frac{R}{2}$$

Problema 192. — Qual o apothema de um triangulo equilatero inscripto em um circulo cujo raio mede $14^m{,}82$?

$$Ap=\frac{14{,}82}{2}=7^m{,}41$$

O *raio do circulo inscripto* em um trian-

gulo qualquer é egual á **área** d'esse triangulo dividida pela metade do perimetro.

$$R = \frac{\text{Área}}{\frac{P}{2}}$$

Problema 193. — Qual o raio de um circulo inscripto em um triangulo cujos lados medem respectivamente $1^m,25$, $0^m,80$ e $0^m,75$?

A metade do perimetro $= \frac{1,25 + 0,80 + 0,75}{2} = \frac{2,80}{2} = 1,40$

A área do triangulo $=$

$= \sqrt{1,40\,(1,40 - 1,25)\,(1,40 - 0,80)\,(1,40 - 0,75)} =$

$= \sqrt{1,40 \times 0,15 \times 0,60 \times 0,65} = \sqrt{0,0819} = 0^{m2},2860$

Portanto

$$R = \frac{0,2860}{1,40} = 0^m,2043$$

O ***raio do circulo circumscripto*** a um triangulo qualquer é egual ao producto dos tres lados do triangulo, dividido pelo quadruplo da **área.**

$$R = \frac{abc}{4 \times \text{Área}} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

a, b, c são os lados do triangulo; p é a metade do perimetro do triangulo.

Problema 194. — Os lados de um triangulo são respectivamente eguaes a $0^m,6$; $0^m,7$ e $0^m,8$; pede-se o raio do circulo circumscripto a esse triangulo.

O producto dos tres lados $= 6 \times 7 \times 8 = 0,336$.

A área do triangulo $=$

$= \sqrt{1,05 \times 0,45 \times 0,35 \times 0,25} = \sqrt{0,04134375} = 0^{m2},2033$.

O raio do circulo circumscripto $=$

$$= \frac{0,336}{4 \times 0,2033} = \frac{0,336}{0,8132} = 0^m,413.$$

ÁREA DO TRAPEZIO

Recordemo-nos de que o trapezio tem duas bases, que são os dois lados parallelos d'esse quadrilatero.

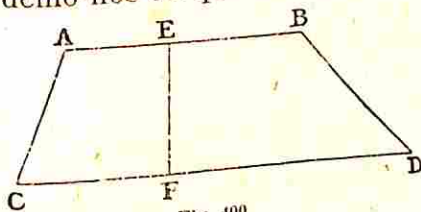



Fig. 400

A altura é a perpendicular EF (fig. 400) commum ás bases. Transformemos a **área** do trapezio na do rectangulo: tomemos os pontos M e N situados nos meios dos lados não parallelos AC e BD (fig. 401).

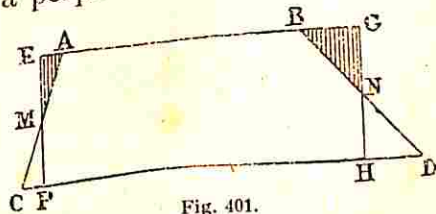



Fig. 401.

Por esses pontos tracemos as rectas E P e G H (fig. 401) perpendiculares communs ás bases e eguaes á altura do trapezio. Prolonguemos a base AB até encontrar essas duas perpendiculares.

Os triangulos MEA e MPC são eguaes e tambem os triangulos NGB e NHD; porque têm um lado egual adjacente a dois angulos respectivamente eguaes (*).

Substituamos os triangulos MPC por MEA e NHD por NGB; teremos o trapezio transformado em um rectangulo EGHP, cuja área é $PH \times PE$.

PE é ao mesmo tempo a altura do rectangulo e a do trapezio; resta saber o que é a base PH do rectangulo, em relação ás bases do trapezio.

Ora lembremo-nos de que $EA = CP$, e $BG = HD$. Podemos dizer que a recta PH vale AB mais EA e BG ou CD menos as mesmas quantidades EA e BG.

As duas bases reunidas valem portanto o dobro da base do rectangulo ou, o que vem a ser o mesmo, PH é a metade da somma ou a semi-somma das bases.

(*) Egualdade dos triangulos.

Para avaliarmos a **área** do trapezio multiplicamos a semi-somma das bases pela altura, o que nos fornece a fórmula :

$$\text{Área} = \frac{B+b}{2} \times A$$

ÁREA DO POLYGONO IRREGULAR

Para avaliarmos a **área** de um polygono irregular podemos decompol-o em triangulos traçando todas as diagonaes que partem de um mesmo vertice (fig. 402), ou marcando um

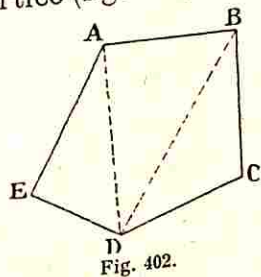
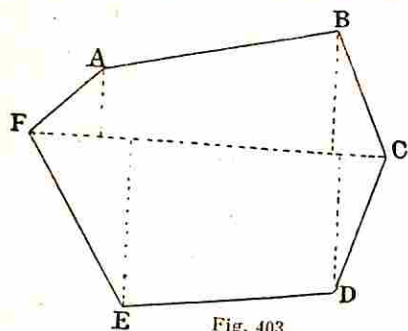



Fig. 402.

ponto interior e ligando-o a todos os vertices do polygono; depois calculamos a **área** de cada um dos triangulos em que ficou decomposto o polygono. Entretanto parecendo muito simples este processo, não é o que permitte a avaliação da **área** da maneira mais commoda.

Geralmente decompomos o polygono em triangulos rectangulos e trapezios rectan-

gulos (fig. 403) e em seguida calculamos a **área** de cada triangulo e de cada trapezio, e

Fig. 403.

a somma de todas essas **áreas** é a **área** do polygono irregular.

ÁREA DO LOSANGO

Um losango póde ser sempre transformado em um rectangulo equivalente em que um dos lados é egual a uma das diagonaes do losango e o

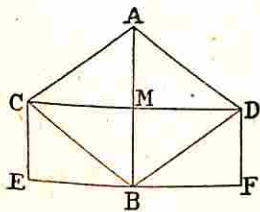



Fig. 404.

outro lado egual á metade da outra diagonal.

O losango CABD (fig. 404) é equivalente ao rectangulo CDEF; portanto, a **área** do losango se obtem multiplicando as duas **diagonaes** entre si e tomando a *metade* do producto :

$$\text{Área} = \frac{D \times d}{2}$$

Problema 195. — Qual a área de um ladrilho da fórma de um losango cujas diagonaes são respectivamente eguaes a $0^{m},16$ e $0^{m},12$?

$$\text{Área} = \frac{0,16 \times 0,12}{2} = 0^{m2},0096$$

Da formula $\text{Área} = \dfrac{D \times d}{2}$ deduzem-se :

$$d = \frac{2 \times \text{Área}}{D} \quad \text{ou} \quad D = \frac{2 \times \text{Área}}{d}$$

isto é, uma ***diagonal*** é egual a duas vezes a **área** dividida pela outra diagonal

Problema 196. — Qual é a dimensão de uma das diagonaes de um losango cuja área mede $27^{m2},20$ e a outra diagonal $6^{m},40$?

$$D = \frac{27,20 \times 2}{6,40} = \frac{27,20}{3,20} = 8^{m},50$$

ÁREA DO POLYGONO REGULAR

Quando o polygono é regular, effectuamos a decomposição em triangulos, ligando o

centro a todos os vertices (fig. 405). Obtemos tantos triangulos quantos são os lados do polygono e cada um tem a mesma base, porque todos os lados do polygono são eguaes, e a

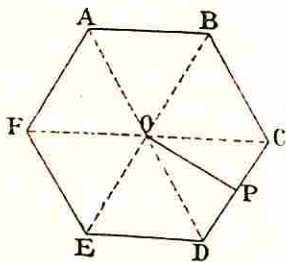



Fig. 405.

mesma altura, que é o apóthema do polygono

Avaliamos por exemplo a **área** do triangulo DCO multiplicando o lado DC do polygono pela metade do apóthema OP.

Se o polygono tem cinco, seis, oito lados, multiplicamos por cinco, seis, oito a **área** de um triangulo para termos a do polygono, o que equivale a multiplicar o *perimetro* do polygono, pela metade do *apothema*.

$$\text{Área} = P \times \frac{Ap}{2}$$

P é o perimetro e Ap é o apóthema.

ÁREA DO PENTAGONO REGULAR

A **área** de um pentagono regular é egual ao producto do quadrado de um lado pelo numero constante 1,72 :

$$\text{Area} = L^2 \times 1{,}72$$

O numero constante é o resultado da seguinte operação :

$$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{25+22{,}3606} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{47{,}3606} = \frac{6{,}88}{4} = 1{,}72$$

Problema 197. — Qual a área de um pentagono regular de $0^m{,}82$ de lado?

$$\text{Área} = \overline{0{,}82}^2 \times 1{,}72 = 0{,}6724 \times 1{,}72 = 1^{m2}{,}156528$$

Se o pentagono regular é inscripto em um circulo cujo raio é conhecido, a **área** d'esse pentagono é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 2,377.

$$\text{Área} = R^2 \times 2{,}377$$

O numero constante é assim obtido :

$$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{5}{8}\sqrt{10+4{,}47212} =$$

$$= \frac{5}{8}\sqrt{14{,}47212} = \frac{5 \times 3{,}804}{8} = 2{,}377$$

Problema 198. — Qual a área de um pentagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,46$?

$$\text{Área} = \overline{0,46}^2 \times 2,377 = 0,2116 \times 2,377 = 0^{m2},5029$$

O *lado* de um pentagono regular inscripto em um circulo, cujo raio é conhecido, obtem-se multiplicando esse raio pelo numero constante 1,175

$$\text{Lado} = R \times 1,175$$

O numero constante vem de :

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\times 2,236} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10,000-4,472} = \frac{1}{2}\sqrt{5,528} =$$

$$= \frac{1}{2}2,35 = 1,175$$

Problema 199. — Qual o lado de um pentagono regular inscripto em um circulo de raio egual a $0^m,58$?

$$\text{Lado} = 0,58 \times 1,175 = 0^m,6815$$

O *apothema* d'esse mesmo pentagono é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,81.

$$\text{Ap} = R \times 0,81$$

Esse numero constante resulta de :

$$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}\times 3,236 = 0,809 \text{ ou } 0,81$$

Problema 200. — Qual o apóthema de um pentagono regular inscripto num circulo cujo raio mede $16^m,45$?

$$\text{A p} = 16,45 \times 0,81 = 13^m,3245$$

ÁREA DO HEXAGONO REGULAR

A **área** de um hexagono regular é egual ao producto do quadrado de um de seus lados pelo numero constante 2,598.

$$\text{Área} = L^2 \times 2,598$$

O numero constante resulta de :

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}1,73205 = 2,598$$

Problema 201. — Qual a área occupada pelo pedestal de uma estatua : sabendo-se que a fórma do pedestal é hexagonal regular e que um dos lados d'essa base mede $2^m,84$?

A área occupada pelo pedestal $= \overline{2,84}^2 \times 2,598 =$
$= 8,0656 \times 2,598 = 20^{m2},954128$

O *apothema* d'esse polygono é egual ao raio multiplicado pelo numero 0,866 :

$$\text{Ap} = R \times 0,866$$

O numero 0,866 é obtido do seguinte modo :

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}1,73205 = 0,866$$